Correction Printemps 05
Représentation matricielle

Solution de l'exercice 1

1. Calculons, puisque pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P(1)X^2 + XP' + P'(2)$, on a

$$\begin{aligned} f(1) &= X^2 \\ f(X) &= X^2 + X + 1 \\ f\left(X^2\right) &= X^2 + 2X^2 + 2 \times 2 = 3X^2 + 4. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\boxed{A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

2. On pose $A_1 = A - I_3$ et f_1 l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associée à A_1.
   (a) Par définition,

$$A_1 = A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Or $A_1 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f_1)$. Donc on en déduit que

$$\forall P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f_1(P)) = A_1 \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0 + a_1 + 4a_2 \\ 0 \\ a_0 + a_1 + 2a_2 \end{bmatrix}.$$

D'où,

$$\boxed{\forall P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X], \qquad f_1(P) = -a_0 + a_1 + 4a_2 + (a_0 + a_1 + 2a_2)X^2.}$$

   (b) Par la question précédente, on a

$$\mathrm{Im}(A_1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(A_1) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow \frac{C_2+C_1}{2} \\ C_3 \leftarrow \frac{C_3+4C_1}{6} \end{array} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow -(C_1 - C_2) \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{array} \\ &= \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_1}. \end{aligned}$$

Les vecteurs de $\mathscr{B}_1$ ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{B}_1$ est libre et de plus $\mathscr{B}_1$ engendre $\operatorname{Im}(A_1)$. Conclusion,

$$\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(A_1).}$$

Puisque $A_1 = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f_1)$, on en déduit directement que

$$\boxed{\left(1, X^2\right) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f_1).}$$

(c) *Méthode 1.* Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(A_1) \quad &\Leftrightarrow \quad A_1 X = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}-1 & 1 & 4\\0 & 0 & 0\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}-x+y+4z=0\\0=0\\x+y+2z=0\end{cases} \\
&\qquad \textit{Le premier qui fait autre chose que du pivot...} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}-x+y+4z=0\\2y+6z=0\end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x = y+4z = -3z+4z = z\\y=-3z\end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix}z\\-3z\\z\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{Ker}(A_1) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}\right)$$

Le vecteur $\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}$ est non nul donc constitue une famille libre et qui de plus engendre $\operatorname{Ker}(A_1)$. Conclusion,

$$\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(A_1).}$$

On en déduit directement que

$$\boxed{X^2 - 3X + 1 \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f_1).}$$

Méthode 2. Par le théorème du rang, on a

$$\dim(\operatorname{Ker}(A_1)) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \dim(\operatorname{Im}(A_1)).$$

Or par la question précédente, $\operatorname{rg}(A_1) = \dim(\operatorname{Im}(A_1)) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_1) = 2$. Donc

$$\dim(\operatorname{Ker}(A_1)) = 3 - 2 = 1.$$

Or on observe que $A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$. *Bon je vous l'accorde, ici ce n'est pas très évident, mais je voulais vous montrer cette méthode qui peut être efficace lorsque le vecteur est plus facile à trouver.* Donc $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}(A_1)$. Ce vecteur est non nul donc forme une famille libre de cardinal $1 = \dim(\operatorname{Ker}(A_1))$. Conclusion,

$$\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(A_1).}$$

(d) Par les questions précédente, $\operatorname{Ker}(f_1) \neq \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$. Donc f_1 n'est pas injective. De plus, on a également $\dim(\operatorname{Im}(f_1)) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$, donc $\operatorname{Im}(f_1) \neq \mathbb{R}_2[X]$. Donc f_1 n'est pas surjective. OU ALORS, on invoque la caractérisation des isomorphismes en dimension finie. Puisque f_1 est un endomorphisme en dimension finie, on en déduit que puisque f_1 n'est pas injectif, alors f_1 n'est pas surjectif. Et donc a fortiori f_1 n'est pas bijectif :

$$\boxed{f_1 \text{ n'est ni injectif, ni surjectif, ni bijectif.}}$$

3. Posons $A_2 = A + I_3$, on a

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(A + I_3) \quad & \Leftrightarrow \quad A_2 X = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ 2y = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{car } L_3 = L_1 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -4z \\ y = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} -4z \\ 0 \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(A + I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Or $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur non nul donc constitue une famille libre et qui de plus engendre $\operatorname{Ker}(A + I_3)$. Conclusion,

$$\boxed{\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(A + I_3).}$$

Puisque $A + I_3 = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$. On en déduit directement que

$$\boxed{X^2 - 4 \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\left(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right).}$$