Correction Printemps 06
Analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1

1. Pour tout $x > \frac{1}{\pi}$, $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \ln(1) = 0$ et $0 < \frac{1}{x} < \pi$ donc $\sin\left(\frac{1}{x}\right) > 0$. Par conséquent f est bien définie sur $\left]\frac{1}{\pi};+\infty\right[$ et

$$\forall x > \frac{1}{\pi}, \qquad f(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sin^{3/2}\left(\frac{1}{x}\right)}, \qquad \text{car } \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0.$$

On a alors les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-3/2} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{-3/2} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\frac{1}{x^{-3/2}}\left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-3/2} \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{x^{3/2}}{x}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{-3/2}.
\end{aligned}$$

Or on sait que $(1+u)^{-3/2} \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{3u}{2} + o(u)$. Donc en posant $u = -\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on a bien $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $o(u) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1 + \frac{3}{2}\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{7}{12x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{12x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{12x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).}$$

2. Notamment, on déduit de la question précédente que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

De plus $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ admet une branche asymptotique en } +\infty \text{ de direction } (Ox).}$$