Exercice Printemps 07
Représentation matricielle

Exercice 1 Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$ définie par

$$f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(1)X^2 + XP' + P'(2).\end{array}$$

On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On admet les points suivants (démontrés vendredi) :

- $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- $\operatorname{Ker}\left(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) = \operatorname{Vect}\left(X^2 - 3X + 1\right)$.
- $\operatorname{Ker}\left(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) = \operatorname{Vect}\left(X^2 - 4\right)$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ telle que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   On pourra déterminer un troisième noyau bien choisi.

2. En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ qui permette une relation entre $\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f)$ et $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$, relation que l'on précisera.