# Correction Printemps 07
# Représentation matricielle

**Solution de l'exercice 1**

1. D'après la matrice, on cherche $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) \in (\mathbb{R}_2[X])^3$ telle que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = -e_2$ et $f(e_3) = 4e_3$. Autrement dit, on a $f(e_1) - e_1 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ ou encore $e_1 \in \operatorname{Ker}\left(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$. De même, $f(e_2) + e_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow e_2 \in \operatorname{Ker}\left(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$. Enfin, $f(e_3) - 4e_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow e_3 \in \operatorname{Ker}\left(f - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$. Cherchons donc $\operatorname{Ker}\left(f - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$. Commençons par $\operatorname{Ker}(A - 4I_3)$. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(A - 4I_3) \quad &\Leftrightarrow \quad (A - 4I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 4I_3\right) X = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + y + 4z = 0 \\ -3y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -4x + 4z = 0 \\ y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad \text{car } L_1 = -4L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(A - 4I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Dès lors, on en déduit que

$$\operatorname{Ker}\left(f - 4\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) = \operatorname{Vect}\left(X^2 + 1\right).$$

Posons $e_1 = X^2 - 3X + 1$, $e_2 = X^2 - 4$, $e_3 = X^2 + 1$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) X^2 + (-3\lambda_1) X + \lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -3\,\lambda_1=0 \\ \lambda_1-4\,\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1=0 \\ -4\,\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1=0 \\ 5\,\lambda_3=0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3+4L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_3=0. \end{cases}$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B})=3=\dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$. Donc

$$\boxed{\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)=\left(X^2-3X+1,X^2-4,X^2+1\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

De plus, par ce qui précède,

$$\begin{cases} e_1\in\mathrm{Ker}\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) \\ e_2\in\mathrm{Ker}\left(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) \\ e_3\in\mathrm{Ker}\left(f-4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\,(e_1)-e_1=0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ f\,(e_2)+e_2=0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ f\,(e_3)-4e_3=0_{\mathbb{R}_2[X]} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f\,(e_1)=e_1 \\ f\,(e_2)=-e_2 \\ f\,(e_3)=4e_3. \end{cases}$$

On en déduit alors bien que dans $\mathscr{B}$,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.}$$

2. Posons $A=\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(f)$, $D=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(f)$ et $P=P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$. Puisque $\mathscr{B}$ est une base alors $P\in\mathrm{GL}_3\,(\mathbb{R})$ et directement par la formule bien connue de changement de base, on a

$$\boxed{A=PDP^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad D=P^{-1}AP.}$$