Exercice révision 8 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, $T > 0$, f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ ✓ et $[x ; x+T] \subset \mathbb{R}$ ✓ donc f est bien ~~définie~~ continue sur $[x ; x+T]$ donc $\int_x^{x+T} f(t)\,dt$ existe

Ainsi $\boxed{g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$

2) Posons $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ ✓, puisque

f est continue sur $\mathbb{R}$ par le théorème fondamental de l'analyse F est dérivable sur $\mathbb{R}$ ✓ et $F' = f$ sur $\mathbb{R}$ ✓. Donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$. ✓

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = F(x+T) - F(x)$ ✓

Donc par différence et composition de fonctions $\mathcal{C}^1$ $\boxed{g \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ ✓

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = F'(x+T) - F'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g'(x) = f(x+T) - f(x)}$ ou

3) Supposons g constante sur $\mathbb{R}$, Soit $T > 0$

On a donc $g' = 0$ sur $\mathbb{R}$ ✓

Ainsi par 2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) - f(x) = 0$ ✓

$\iff \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$ ✓

et $\boxed{\text{donc } f \text{ est } T\text{-périodique}}$ ou

4) Supposons f bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $T > 0$

Posons $K = \sup_{s \in [x ; x+T]} (|f(s)|)$

il faut prendre $K = \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)|$ Non car ainsi K dépend de x

Par l'inégalité de la moyenne puisque $x + T > x$ ou

$$\left|\int_x^{x+T} f(t)\,dt\right| \leq \sup_{s\in[x;x+T]} |f(s)| \, |x+T-x|$$ v

$$\Rightarrow \left|\int_x^{x+T} f(t)\,dt\right| \leq KT$$ v

$$\Rightarrow |g(x)| \leq KT$$ v

Donc $\boxed{g \text{ est bornée sur } \mathbb{R} \text{ si } f \text{ l'est}}$

5) Supposons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, Soit $T>0$

Soit $\varepsilon>0$

$\exists A\in\mathbb{R}, \forall x>A$, v $\forall t\in[x;x+T], |f(t)|\leq\varepsilon$ oui

En intégrant cette inégalité entre x et $x+T$

On a, $\exists A\in\mathbb{R}, \forall x>A, \int_x^{x+T}|f(t)| \leq \varepsilon\int_x^{x+T}1\,dt$ oui !

puisque $x+T>x$, v par l'inégalité triangulaire

$\exists A\in\mathbb{R}, \forall x>A, |g(t)| \leq \varepsilon T$ v

Et donc en posant $\varepsilon'=\varepsilon T$

$\exists A\in\mathbb{R}, \forall x>A, |g(t)| \leq \varepsilon'$ TB !!

Donc on a bien $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0}$ oui !

Scanné avec CamScanner