Correction Printemps 08
Intégration

Solution de l'exercice 1

1. La fonction f est continue par hypothèse sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est continue sur $[x; x+T]$. Donc $\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et $g(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. Posons $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (par exemple il est possible de prendre n'importe quel autre point fixé à la place de 0). Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, on sait que F existe et est l'unique primitive de f s'annulant en 0. En particulier la fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x+T) - F(x).$$

Donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est } \mathscr{C}^1}$ comme différence de deux fonctions $\mathscr{C}^1$. De plus,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x).}$$

3. On suppose que g est constante i.e.

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x, \qquad g(x) = C$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = 0.$$

Donc d'après la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) - f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) = f(x).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } T\text{-périodique.}}$$

4. On suppose dans cette question que f est bornée sur $\mathbb{R}$:

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \leqslant M.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in [x; x+T]$, on a $|f(t)| \leqslant M$. Donc par l'inégalité triangulaire puis la croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens (car $T > 0$) :

$$|g(x)| = \left|\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{x+T} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M \int_x^{x+T} 1\,\mathrm{d}t = MT.$$

Or M et T sont indépendants de x. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |g(x)| \leqslant MT.$$

Conclusion,

$$\boxed{g \text{ est bornée.}}$$

5. On suppose dans cette question que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Alors, par définition,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \geqslant x_0, \qquad |f(x)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{T} > 0$. Alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon'$. Soit $x \geqslant x_0$. Alors pour tout $t \in [x; x+T]$, on a $t \geqslant x_0$ et donc $|f(t)| \leqslant \varepsilon'$. Donc comme dans la question précédente, par l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens car $T > 0$, on a

$$|g(x)| = \left|\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{x+T} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon' \int_x^{x+T} 1\,\mathrm{d}t = \varepsilon'\,T = \varepsilon\,.$$

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $|g(x)| \leqslant \varepsilon$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$