Exercice 1 :

1.) On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a donc :

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}} \quad = 4e_1$$

2.) On a :

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On échelonne :

$$A \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$A \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix}$$

$$A \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{car ...}$$

Il y a 2 pivots, or le rang d'une matrice est le nombre de pivots de la matrice échelonnée, donc : $\boxed{rg(A - 4I_3) = 2}$ oui

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\underbrace{\left\{(A - 4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\}}_{Im(A-4I_3)} = \left\{\begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}\right\} \in Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

oui

Or, $Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ Parachutage.

Donc, $Im(A - 4I_3) \subset Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ et ils ont la même dimension

Pourquoi ?

$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ plus simple

finalement, $\boxed{\mathrm{Im}(A-4I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}\right)}$ Oui

3.) Par la question 1, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-I_3)$ V

Or, par le théorème du rang, oui! $\dim(\mathrm{Ker}(A-I_3)) = 1$ A justifier

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(A-I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$ V

4.) On a, $A-I_3 = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ V donc $\mathrm{rg}(A-I_3) = 1$ OK $\to \dim(\mathrm{Ker}(A-I_3)) = 2$ V

Or, on remarque que :

Bien vu !

$\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-I_3)$ sont des vecteurs non colinéaires et que

$\dim(\mathrm{Ker}(A-I_3)) = 2$, donc, $\boxed{\mathrm{Ker}(A-I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)}$ Bien.

5.) On a $B \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$

Il faut trouver B ici.

Or, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ inversible $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ est une base Faux ! Tu confonds $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$

De plus,

N'existe pas tant que l'on n'a pas montré que B est une base

$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base}}$.