Correction Printemps 09
Représentation matricielle

Solution de l'exercice 1

1. On a directement,

$$f(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4e_1.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(e_1) = 4e_1.}$$

2. On a

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dès lors,

$$\operatorname{Im}(A - 4I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(A - 4I_3) &= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) && C_1 \leftrightarrow C_2 \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right) && \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right) && \text{car } C_3 = -C_2 \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_2 \leftarrow \tfrac{1}{3} C_2 \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2.
\end{aligned}$$

Les vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, -1, 1)$ ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre qui de plus engendre $\operatorname{Im}(A - 4I_3)$, conclusion,

$$\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(A - 5I_3).}$$

Notamment, on en déduit aussi

$$\boxed{\operatorname{rg}(A - 4I_3) = \operatorname{Card}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 2.}$$

3. Par le théorème du rang, on en déduit que

$$\operatorname{rg}(A-4I_3)+\dim(\operatorname{Ker}(A-4I_3))=\dim\left(\mathbb{R}^3\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad 2+\dim(\operatorname{Ker}(A-4I_3))=3.$$

Donc

$$\dim(\operatorname{Ker}(A-4I_3))=1,$$

autrement dit, $\operatorname{Ker}(A-4I_3)$ est engendré par un vecteur non nul. Or par la question 1, $f(e_1)=4e_1$ i.e. $f(e_1)-4e_1=0$ ou encore $e_1\in\operatorname{Ker}(f-4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Or f étant l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (important !) canoniquement associé à A. Donc $e_1\in\operatorname{Ker}(f-4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\operatorname{Ker}(A-4I_3)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A-4I_3)=\operatorname{Vect}(e_1)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right).}$$

4. Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}X\in\operatorname{Ker}(A-I_3) &\Leftrightarrow (A-I_3)X=0_{\mathbb{R}^3}\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}\\ &\Leftrightarrow x+y+z=0\\ &\Leftrightarrow z=-x-y\\ &\Leftrightarrow X=\begin{bmatrix}x\\y\\-x-y\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{Ker}(A-I_3)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right).$$

Les vecteurs $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre qui de plus engendre $\operatorname{Ker}(A-I_3)$ donc est une base de $\operatorname{Ker}(A-I_3)$. Conclusion,

$$\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(A-I_3).}$$

5. Posons $e_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $e_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3=0_{\mathbb{R}^3}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ -\lambda_2+\lambda_3=0\\ -2\,\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ -\lambda_2+\lambda_3=0\\ -3\,\lambda_3=0\end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \lambda_3=\lambda_2=\lambda_1=0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus, $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Enfin, par la question 1, $f(e_1) = 4e_1$ et par la question précédente, $f(e_2) - e_2 = 0$ i.e. $f(e_2) = e_2$ et de même, $f(e_3) = e_3$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.}$$