



Correction Printemps 10

Continuité, dérivabilité

Solution de l'exercice 1

1. En tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}^* , on en déduit directement que f est continue sur \mathbb{R}^* . Etudions la continuité en 0. On sait que $f(0) = 1$. Calculons la limite quand $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$. On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x).$$

Donc

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Par quotient d'équivalents, on obtient que

$$f(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

Autrement dit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1 = f(0).$$

Donc la fonction f est continue en 0.

Conclusion,

la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

NB : on pouvait reconnaître le taux d'accroissement de la fonction exponentielle pour dire que $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow \exp'(0) = 1$ quand $x \rightarrow 0$ et que par passage à l'inverse, $f(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$.

2. La fonction f est \mathcal{C}^1 (et même \mathcal{C}^∞) sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonction \mathcal{C}^1 (et même \mathcal{C}^∞) dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}^* . Etudions le comportement de f en 0. On souhaite appliquer le théorème de prolongement de fonction de classe \mathcal{C}^1 .
- La fonction f est continue sur \mathbb{R} .
 - La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* .
 - Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a de plus

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - x e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1 - x) - 1}{(e^x - 1)^2}.$$

Or

$$\begin{aligned} e^x(1 - x) - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)(1 - x) - 1 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x - x^2 + o(x^2) - 1 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Donc

$$e^x(1 - x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$



De plus $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et donc par élévation au carré $(e^x - 1)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$. Ainsi par quotient d'équivalents,

$$f'(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Autrement dit $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$ existe et vaut $-1/2$.

Des trois points précédents, on en déduit à l'aide du théorème de prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , que f est \mathcal{C}^1 en 0 et de plus $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

La fonction f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et en 0. Conclusion,

f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .