On montre que $p \circ q = q \Rightarrow Im(q) \subset Im(p)$ ✓

On a p et q des projecteurs $\Rightarrow p = p \circ p$ ✓

$q = q \circ q$

On a alors $p \circ q = q \circ q$

$\Leftarrow$ $p(q) = q(q)$

Ainsi comme q et p sont des Projecteurs

$\{y \in E \mid q(y) = y\} = Im(q)$ car

$\{x \in E \mid p(x) = x\}$ $Im(p)$

Soit $y \in E$, $q(y) \in Im(q)$, soit $x = q(y)$ $\in Im(p)$ car $Im(q) \subseteq Im(p)$

donc $p(x) = x$

i.e. $p \circ q(y) = q(y)$

$\Rightarrow p(x) = x \begin{cases} \in Im(q) \\ \in E \end{cases}$ (donc $p(x) \notin Ker(p)$) à dire avant

donc $p(x) = x \in Im(p)$

On a alors

$\forall y \in E \mid q(y) \in Im(q)$

$p(q(y)) = q(y) \mid \in Im(q)$ et $\in Im(p)$

Alors on a bien $p \circ q = q$ $\Leftarrow$ $Im(q) \subset Im(p)$

OK cf corrigé pour éclaircir la rédaction

Ah je crois que l'on vient de faire ce sens

On montre ensuite $Im(q) \subseteq Im(p) \Rightarrow p \circ q = q$

$Im(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\} \left(= Ker(p - Id_E)\right)$

$Im(q) = \{y \in E \mid q(y) = y\}$

Si $\{y \in E \mid q(y) = y\} \subseteq \{x \in E \mid p(x) = x\}$

Or $\forall$ $y \in \cancel{E}$ $Im(q)$, $q(y) = y$

Ainsi $\forall y \in E \Rightarrow q(y) \in E$, on pose $x = q(y) \in E \Rightarrow x \in E$, $p(x) = x$?

Pourquoi ?

Alors $p(q(y)) = q(y)$

Ainsi on a bien $p \circ q = q$

A reprendre avec le corrigé.

Donc $Im(q) \subseteq Im(p) \Rightarrow p \circ q = q$

On a $Im(q) \subseteq Im(p) \Rightarrow p \circ q = q$

et $p \circ q = q \Rightarrow Im(q) \subseteq Im(p)$

Ainsi $\boxed{\operatorname{Im}(q) \subseteq \operatorname{Im}(p) \Leftrightarrow q \circ q = q}$

Scanned with CamScanner

Montrons que $Ker(q) \subseteq Ker(p) \iff p \circ q = p$

- Montrons tout d'abord que $Ker(q) \subseteq Ker(p) \Rightarrow p \circ q = p$ OK

On $E = Ker(q) \oplus Im(q)$ ✓

On pose $\forall x \in E, \exists\, x_1 \in Ker(q)$ et $x_2 \in Im(q)$:

$$x = x_1 + x_2 \quad ✓$$

On calcule $p \circ q(x) = p \circ q(x_1 + x_2)$ ✓

$= p \circ q(x_1) + p \circ q(x_2)$ ✓ car $p \circ q$ est une application linéaire

On $x_1 \in Ker(q)$ ✓

$\Rightarrow p \circ q(x) = p \circ \underbrace{q(0)}_{=0} + p \circ q(x_2)$

$= \underbrace{p(0)}_{=0}$ $+ p \circ q(x_2)$

$\Rightarrow p \circ q(x) = p \circ q(x_2)$ ✓

$\Rightarrow p \circ q(x) = p(x_2)$ car $q(x_2) = x_2$ car $x_2 \in Im(q)$ oui !

D'autre part

$p(x) = p(x_1 + x_2)$

$= p(x_1) + p(x_2)$ ✓ On $x_1 \in Ker(q) \subseteq Ker(p)$ ✓

Donc $x_1 \in Ker(p)$

$\Rightarrow p(x) = p(x_2)$ ✓

On a alors $p \circ q(x) = p(x)$ oui

Donc $Ker(q) \subseteq Ker(p) \Rightarrow p \circ q = p$ Bien.

D'autre part montrons que $p \circ q = p \Rightarrow Ker(q) \subseteq Ker(p)$

On prend $x \in Ker(q)$ ✓

$p \circ q(x) = p(x)$ ✓

$\underbrace{p(0)}_{=0} = p(x)$ car $q(x) = 0$ ✓ car $x \in Ker(q)$

$\Rightarrow x \in Ker(p)$ ✓

Scanned with CamScanner

Donc $\forall x \in \mathrm{Ker}(q)$,

$x \in \mathrm{Ker}(p)$ oui

Ainsi $p \circ q = p \Rightarrow \mathrm{Ker}(q) \subseteq \mathrm{Ker}(p)$ ✓

Donc $\boxed{p \circ q = p \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(q) \subseteq \mathrm{Ker}(p)}$ +B.