Correction Printemps 11
Applications linéaires

Solution de l'exercice 1

1. Supposons que $\mathrm{Im}\,(q) \subseteq \mathrm{Im}\,(p)$. Soit $x \in E$. Alors, $q(x) \in \mathrm{Im}\,(p) \subseteq \mathrm{Im}\,(p)$. Or on sait que $\mathrm{Im}\,(p) = \{a \in E \mid p(a) = a\}$. Donc pour $a = q(x)$, on a $p \circ q(x) = q(x)$. Ceci étant vrai pour $x \in E$ quelconque, on en déduit que $p \circ q = q$.

   Réciproquement, supposons que $p \circ q = q$. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(q)$. Alors, il existe $y \in E$ tel que $x = q(y)$. Par hypothèse, $q(y) = p \circ q(y) \iff x = p(x)$. D'où $x \in \mathrm{Im}\,(p)$. Ainsi, $\mathrm{Im}\,(q) \subseteq \mathrm{Im}\,(p)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(q) \subseteq \mathrm{Im}\,(p) \qquad \Leftrightarrow \qquad p \circ q = q.}$$

2. Supposons $\mathrm{Ker}\,(q) \subseteq \mathrm{Ker}\,(p)$. Montrons que $p \circ q = p$ est le projecteur. Soit $x \in E$. Puisque q est un projecteur de E, on sait que $E = \mathrm{Ker}\,(q) \oplus \mathrm{Im}\,(q)$. Donc il existe $(y, z) \in \mathrm{Ker}\,(q) \times \mathrm{Im}\,(q)$ tel que $x = y + z$. Ainsi, par linéarité de $p \circ q$ (car p et q le sont),

$$p \circ q(x) = p \circ q(y) + p \circ q(z).$$

   Or $y \in \mathrm{Ker}\,(q)$ donc $q(y) = 0_E$ et donc $p \circ q(y) = p\,(0_E) = 0_E$. D'autre part, $z \in \mathrm{Im}\,(q) = \{a \in E \mid q(a) = a\}$. Donc $q(z) = z$. Ainsi, $p \circ q(z) = p(z)$. En résumé,

$$p \circ q(x) = p(z).$$

   D'autre part,

$$p(x) = p(y + z) = p(y) + p(z).$$

   Or $y \in \mathrm{Ker}\,(q)$ et $\mathrm{Ker}\,(q) \subseteq \mathrm{Ker}\,(p)$ par hypothèse. Donc $y \in \mathrm{Ker}\,(p)$ i.e. $p(y) = 0_E$. Ainsi, $p(x) = p(z)$. Finalement,

$$p \circ q(x) = p(z) = p(x).$$

   Ceci étant vrai pour $x \in E$ quelconque. On conclut que $p \circ q = p$.
   Réciproquement, supposons $p \circ q = p$ et montrons que $\mathrm{Ker}\,(q) \subseteq \mathrm{Ker}\,(p)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(q)$. Alors $q(x) = 0_E$. De plus, par hypothèse,

$$p(x) = p \circ q(x) = p\,(0_E) = 0_E.$$

   Donc $x \in \mathrm{Ker}\,(p)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$. On en déduit que

$$\mathrm{Ker}\,(q) \subseteq \mathrm{Ker}\,(p)\,.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(q) \subseteq \mathrm{Ker}\,(p) \qquad \Leftrightarrow \qquad p \circ q = p.}$$