



## TD0

### Révisions de calculs

**Exercice 1 - Solution.** Simplifier les expressions suivantes :

$$1. A = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} + \frac{1}{9} - \frac{5}{6}, \quad 2. B = \frac{\frac{\frac{2}{3}+2}{\frac{3}{4}-\frac{5}{6}} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}}, \quad 3. C = \frac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100}.$$

$$4. D = \frac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}, \quad 5. E = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \quad 6. F = \sqrt{\frac{17}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}}$$

$$7. G = \left(\sqrt{2}\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}, \quad 8. H = (\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}).$$

**Exercice 2 - Solution.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Développer les expressions suivantes.

$$1. A = (x^2 - 2)^2, \quad 2. B = (3x + 1)^4, \quad 3. C = (3x + 2)^7.$$

$$4. D = (2x^2 - x + 1)^2, \quad 5. E = (x^2 + 2x + 2)^3, \quad 6. F = (x + y + z + t)^2.$$

**Exercice 3 - Solution.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Factoriser les expressions suivantes.

$$1. A = 2x^2 - 12x + 18, \quad 2. B = 4x^2 - 16.$$

$$3. C = (2x - 6)(x + 2) - (x + 1)(x - 3) + 2x(3 - x).$$

$$4. D = (2x + 1)^3 + (2x + 1)^2 + 2x + 1, \quad 5. E = (x + 1)^2 - 4x.$$

$$6. F = x^3 + 6x^2 + 14x + 12, \quad 7. G = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24.$$

$$8. H = x^4 - 2x^2 - 3, \quad 9. I = x^3 - 1.$$

$$10. J = x^3 + 1, \quad 11. K = x^4 + 1.$$

**Exercice 4 - Solution.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Simplifier les calculs suivants.

$$1. A = \sqrt[3]{5^{12}}, \quad 2. B = \sqrt[4]{27} \sqrt[4]{3}, \quad 3. C = \sqrt[5]{a^3} \sqrt[3]{a}.$$

$$4. D = \sqrt[4]{8} \sqrt[4]{2}, \quad 5. E = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{9}}, \quad 6. F = \sqrt{12} \sqrt{3}.$$

$$7. G = \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{4}, \quad 8. H = \sqrt[8]{81} \sqrt[8]{27} \sqrt[8]{3}, \quad 9. I = \sqrt[14]{4^7}.$$

$$10. J = \sqrt{\sqrt{16}}, \quad 11. K = \sqrt[7]{\sqrt{7^7}}, \quad 12. L = \sqrt[3]{\sqrt{3^6}}.$$

**Exercice 5 - Solution.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ , simplifier les expressions suivantes :

$$1. A = e^x e^{-x}, \quad 2. B = e^x + 3e^x, \quad 3. C = (e^x)^3 e^{-2x}.$$

$$4. D = \frac{e^{3x}}{(e^x)^2}, \quad 5. E = e^{3x+2} e^{1-2x}, \quad 6. F = \frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}.$$

$$7. G = \frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}, \quad 8. H = \sqrt{3e^{-x} + 6e^{-x}}, \quad 9. I = \sqrt{\frac{2e^{3x+1}}{e^{2x-1}}}.$$

**Exercice 6 - Solution.** Exprimer en fonction de  $\ln(2)$  et  $\ln(3)$  les expressions suivantes :

$$1. A = \frac{1}{2} \ln(16), \quad 2. B = \ln\left(\frac{1}{2}\right), \quad 3. C = \ln(36) - 2 \ln(3).$$

$$4. D = 2 \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \quad 5. E = \ln(21) + 2 \ln(14) - 3 \ln(0,875).$$

**Exercice 7 - Solution.** Pour chacune des fractions suivantes, décrire l'ensemble des valeurs possibles dans  $\mathbb{R}$  des paramètres puis rendre le dénominateur rationnel.

$$1. A = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}, \quad 2. B = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b}}, \quad 3. C = \frac{1}{\sqrt[3]{2-1}}.$$

$$4. D = \frac{1}{\sqrt[3]{2+2}}, \quad 5. E = \frac{1}{\sqrt[3]{2-1}}, \quad 6. F = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}.$$

**Exercice 8 - Solution.** Pour chacune des fonctions, déterminer son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée.

$$1. f_1 : x \mapsto (4 - 3x)^3, \quad 2. f_2 : x \mapsto (2x - 1)^2 (4 - 3x)^3.$$

$$3. f_3 : x \mapsto \frac{3}{(x^2+1)^2}, \quad 4. f_4 : x \mapsto \frac{(3x-2)^3}{(1-2x)^2}.$$

$$5. f_5 : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{(3+2\sqrt{x})^2}, \quad 6. f_6 : x \mapsto \frac{x(\sqrt{x+1})}{(2x^2+1)^3}.$$

$$7. f_7 : x \mapsto \cos^2(x), \quad 8. f_8 : x \mapsto (1 + \tan(x))^2.$$

$$9. f_9 : x \mapsto \frac{1}{(2 - \cos(3x))^2}, \quad 10. f_{10} : x \mapsto \tan^2\left(3x + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$11. f_{11} : x \mapsto \sqrt{4x^2 - 3x - 1}, \quad 12. f_{12} : x \mapsto \sqrt{\sin(x)}.$$

$$13. f_{13} : x \mapsto \frac{e^{\frac{x-1}{2}} - 1}{3e^x + 2}, \quad 14. f_{14} : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{2e^x + 1}}.$$

$$15. f_{15} : x \mapsto \ln(\ln(x)), \quad 16. f_{16} : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{3-2x}\right).$$

**Exercice 9 - Solution.** Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2-x}{x^2-1}, \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}+2}{x+1}, \quad 3. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{2x}-1}{x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{x^2 + 3}, \quad 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 5}{2e^x + e^{-x}}, \quad 6. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{\ln(x) - 1}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x^3)}{x^2 + 1}, \quad 8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}.$$



## Réponses

Solution de l'exercice 1 - *Énoncé.*

- $A = -\frac{17}{36}$ .
- $B = \frac{161}{6}$ .
- $C = \frac{2^5}{3^{11} \times 5} = \frac{32}{885735}$ .
- $D = 1$ .
- $E = 2 - \sqrt{3}$ .
- $F = \frac{4}{3}$ .
- $G = 2$ .
- $H = 2\sqrt{2} + 10\sqrt{3} - \sqrt{6} - 15$ .

Solution de l'exercice 2 - *Énoncé.*

- $A = x^4 - 4x^2 + 2$ .
- $B = 81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1$ .
- $C = 2187x^7 + 10206x^6 + 20412x^5 + 22680x^4 + 15120x^3 + 6048x^2 + 1344x + 128$ .
- $D = 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ .
- $E = x^6 + 6x^5 + 18x^4 + 32x^3 + 36x^2 + 24x + 8$ .
- $F = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt$ .

Solution de l'exercice 3 - *Énoncé.*

- $A = 2(x-3)^2$ .
- $B = 4(x-2)(x+2)$ .
- $C = -(x-3)^2$ .
- $D = (2x+1)(4x^2+6x+3)$ .
- $E = (x-1)^2$ .
- $F = (x+2)(x^2+4x+6)$ .
- $G = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ .
- $H = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)$ .
- $I = (x-1)(x^2+x+1)$ .
- $J = (x+1)(x^2-x+1)$ .
- $K = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ .

Solution de l'exercice 4 - *Énoncé.*

- $A = 625$ .
- $B = 3$ .
- $C = \sqrt[3]{a^2}$ .
- $D = 2$ .
- $E = \frac{1}{3}$ .
- $F = 6$ .
- $G = 2$ .
- $H = 3$ .
- $I = 2$ .
- $J = 2$ .
- $K = \sqrt{7}$ .
- $L = 3$ .

Solution de l'exercice 5 - *Énoncé.*

- $A = 1$ .
- $B = 4e^x e^x$ .
- $C = e^x$ .
- $D = e^x$ .
- $E = e^{x+3}$ .
- $F = e$ .
- $G = e^{4x-3}$ .
- $H = 3e^{-\frac{x}{2}}$ .
- $I = \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}+1}$ .

Solution de l'exercice 6 - *Énoncé.*

- $A = 2 \ln(2)$ .
- $B = -\ln(2)$ .
- $C = 2 \ln(2)$ .
- $D = \ln(2) - \ln(3)$ .
- $E = 11 \ln(2) + \ln(3)$ .

Solution de l'exercice 7 - *Énoncé.*

- $\forall x \geq 1, A = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2}$ .
- $B = \begin{cases} \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a} - \sqrt{(a+b)ab}}{2ab} & \text{si } (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ \frac{\sqrt{b}}{2b} & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{2a} & \text{si } a > 0 \text{ et } b = 0 \end{cases}$
- $C = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$ .
- $D = \frac{\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2} + 4}{10}$ .
- $E = \sqrt[4]{8} + \sqrt{2} + \sqrt[4]{2} + 1$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}, F = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x^2-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{2}$ .

Solution de l'exercice 8 - *Énoncé.*

- $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}, f'_1 : x \mapsto -9(4-3x)^2$ .
- $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}, f'_2 : x \mapsto 5(4-3x)^2(2x-1)(5-6x)$ .
- $\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}, f'_3 : x \mapsto -\frac{12x}{(x^2+1)^3}$ .
- $\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, f'_4 : x \mapsto \frac{(3x-2)^2(1-6x)}{(1-2x)^3}$ .
- $\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R}_+^*, f'_5 : x \mapsto \frac{3-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(3+2\sqrt{x})^3}$ .
- $\mathcal{D}_{f_6} = \mathbb{R}_+^*, f'_6 : x \mapsto \frac{3\sqrt{x}(x^2-4x+\frac{1}{2})-12x+1}{(2x^2+1)^4}$ .
- $\mathcal{D}_{f_7} = \mathbb{R}, f'_7 : x \mapsto -2\sin(x)\cos(x)$ .
- $\mathcal{D}_{f_8} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, f'_8 : x \mapsto 2(1 + \tan^2(x))(1 + \tan(x))$ .
- $\mathcal{D}_{f_9} = \mathbb{R}, f'_9 : x \mapsto -\frac{6\sin(3x)}{(2-\cos(3x))^3}$ .
- $\mathcal{D}_{f_{10}} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}, f_{10} : x \mapsto 6(1 + \tan^2(3x + \frac{\pi}{3}))\tan(3x + \frac{\pi}{3})$ .
- $\mathcal{D}_{f_{11}} = ]-\infty; -\frac{1}{4}[ \cup ]1; +\infty[, f_{11} : x \mapsto \frac{8x-3}{2\sqrt{4x^2-3x-1}}$ .
- $\mathcal{D}_{f_{12}} = k \in \mathbb{Z}]2k\pi; (2k+1)\pi[, f_{12} : x \mapsto \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$ .
- $\mathcal{D}_{f_{13}} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f_{13} : x \mapsto 3 \frac{e^{\frac{x-1}{x+2}}(3e^x+2)-(x+2)^2(e^{\frac{x-1}{x+2}}-1)e^x}{(3e^x+2)^2}$ .



$$14. \mathcal{D}_{f_{14}} = \mathbb{R}^*, f_{14} : x \mapsto -\frac{e^{\frac{1}{x}}(e^x(x^2+2)+1)}{x^2(2e^x+1)^{3/2}}.$$

$$15. \mathcal{D}_{f_{15}} = ]1; +\infty[, f_{15} : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}.$$

$$16. \mathcal{D}_{f_{16}} = ]-\infty; 1[ \cup ]\frac{3}{2}; +\infty[, f_{16} : x \mapsto \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x-3}.$$

**Solution de l'exercice 9 - *Énoncé*.**

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2-x}{x^2-1} = -\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}+2}{x+1} = 0.$$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{2x}-1}{x} = (\exp(2x))' |_{x=0} = 2.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x-x}{x^2+3} = +\infty.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x+5}{2e^x+e^{-x}} = \frac{1}{2}.$$

$$6. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{\ln(x)-1} = 0.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x^3)}{x^2+1} = 0.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \frac{x^2-1}{2x} = +\infty.$$