



TD 10

Equations différentielles

Equations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1 Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$ | 2. $y' + y = 2 \sin(x)$ |
| 3. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ | 4. $y' - y = (x+1)e^x$ |
| 5. $y' - 2y = \cos(3x) + e^{2x}$ | 6. $y' + 2y = (x^2 + 1)e^{-x}$ |
| 7. $y' + iy = (x+1) \cos(x)$ | 8. $y' + y = x \operatorname{ch}(x)$ |

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés :

- | | |
|---|--|
| 1. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ sur \mathbb{R} . | 2. $(1+x^2)y' + xy = 1 + 2x^2$ sur \mathbb{R} . |
| 3. $(x \ln x)y' - y = \ln x$ sur $[1, +\infty[$. | 4. $xy' + y = \cos x$ sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* . |
| 5. $(1-x)y' + y = \frac{x-1}{x}$ sur $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. | |
| 6. $2xy' + y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ sur \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* | 7. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $] -1, 1[$. |
| 8. $(1 + \cos^2 x)y' - \sin(2x)y = \cos x$ sur \mathbb{R} . | |
| 9. $y' \cos x + y \sin x = 1$ sur $]0, \pi[$. | 10. $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = \operatorname{sh}^3(x)$ sur \mathbb{R} |
| 11. $\operatorname{sh}(x)y' - \operatorname{ch}(x)y = 1$ sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* . | |

Exercice 3 Donner la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(t)y' + \operatorname{sh}(t)y = 1 + t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 On considère l'équation différentielle

$$(E) : x(x+1)y' + y = \arctan(x)$$

1. Donner les solutions réelles de (E) sur l'intervalle $K =]0, +\infty[$.
2. Préciser les solutions réelles de (E) sur les intervalles $I =]-\infty, -1[$ et $J =]-1, 0[$.

Problèmes de raccord

Exercice 5 On cherche à résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E) : ty' - 2y = t^3$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur \mathbb{R}_+^* , puis sur \mathbb{R}_-^* .
2. Déterminer les solutions de (E) sur \mathbb{R}
3. Déterminer les solutions de (E) sur \mathbb{R} vérifiant $y(1) = 0$.

Exercice 6 Résoudre sur \mathbb{R} les équations non normalisées suivantes

1. $(1-x)y' + y = \frac{x-1}{x}$
2. $y' \cos x + y \sin x = 1$

Equations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 7 Donner les solutions réelles et complexes des équations différentielles suivantes :

- | | | |
|--------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. $y'' + 2y' + 2y = 2x$ | 2. $y'' + y = x^2 + 1$ | 3. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$ |
|--------------------------|------------------------|----------------------------|

Exercice 8 Donner les solutions réelles et complexes des équations différentielles suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $y'' + y' + y = e^x$ | 2. $y'' + 2y' + y = xe^x$ |
| 3. $y'' + y' - 2y = (x^2 + 1)e^x$ | 4. $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sh}(x)$ |
| 5. $y'' - 6y' + 9y = x \operatorname{ch}(x)$ | |

Exercice 9 Donner les solutions réelles et complexes des équations différentielles suivantes :

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $y'' + y' - 2y = \sin(2x)$ | 2. $y'' - y = \cos(x)$ |
| 3. $y'' + y' - y = x \sin(x)$ | 4. $y'' + 2y' + y = 2 \cos^2(x)$ |
| 5. $y'' + 2y' + 3y = x e^x \sin(x)$ | |

Exercice 10 Déterminer l'unique fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie

$$(E) = y'' - 2(1+i)y' + 2iy = t + i, \quad \text{avec } y(0) = y'(0) = 0.$$

Exercice 11 Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 13y = (12x + 8) \cos(x) + (4x + 2) \sin(x)$$



Changement de fonction inconnue et changement de variable

Exercice 12 Equation de Bernoulli. Déterminer les solutions définies sur \mathbb{R} et à valeurs strictement positives de l'équation différentielle :

$$(1 + x^2)y' = 4xy + 4x\sqrt{y}$$

Indication : Considérer la fonction $z = \sqrt{y}$.

Exercice 13 Equation de Ricatti. Déterminer les solutions définies sur \mathbb{R} et ne s'annulant pas de l'équation différentielle :

$$y' + 3y + y^2 = 0$$

Indication : Considérer la fonction $z = \frac{1}{y}$.

Exercice 14 Equation d'Euler. Résoudre l'équation différentielle suivante sur \mathbb{R}_+^* .

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

Indication : Poser $x = e^t$.

Exercice 15 On considère l'équation différentielle

$$(L) : x^2y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = 0$$

1. Intégrer l'équation (L) sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* en posant $u = x^2y$.
2. Existe-t-il des solutions de (L) sur \mathbb{R} ?