TD 11
Calcul matriciel

Exercice 1 Calculer les expressions suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ 1 & i \\ -i & 1+3i \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer G est stable par produit.
2. Montrer que les matrices de G commutent.
3. Montrer que les matrices de G sont inversibles et que leurs inverses sont encore des éléments de G.

Exercice 3 Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore une matrice symétrique.

Exercice 4 Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 5

1. Trouver toutes les matrices A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$.
2. Trouver toutes les matrices B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = I_2$.

Exercice 6 Soit $E_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i, j) qui vaut 1. Pour tous les indices i, j, k, l de $\{1, \ldots, n\}$, calculer $E_{ij}E_{kl}$.

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$. On pose

$$A = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1 \leqslant k,l \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

Calculer $A\overline{A}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 9 Soit pour $\theta \in \mathbb{R}$, $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)^n$.

Exercice 10 Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x) \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2, B^3.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, développer $(B + I_3)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 13 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $(M - I)(M + 3I) = 0$. En déduire M^n.

Exercice 14 On considère dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer J^2 puis déterminer les puissances de J.

2. En déduire à l'aide de la formule du binôme de Newton, les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 Appliquer l'algorithme de Gauss aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} i & i & i & i & i & i \\ 1-i & 1 & 1-i & 1 & 1-i & 1 \\ 2i & 1 & 2 & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 Echelonner la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 17 Dire si les matrices suivantes sont inversibles et donner leurs inverses le cas échéant.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & 1 & a & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 19 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A.

Systèmes linéaires à paramètre

Exercice 20 Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & \cdots & + & 2x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & + & \cdots & + & 3x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & \cdots & + & 4x_n & = & 1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & \cdots & + & nx_n & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 21 Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$, les systèmes d'inconnues complexes suivants :

$$a)\ \begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x + y + (1-m) = m + 2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m + 2 \end{cases}$$

Exercice 22 Discuter des solutions et résoudre suivant les valeurs de λ, a, b, c, d le système suivant :

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + y + z + t = a \\ x + (1+\lambda)y + z + t = b \\ x + y + (1+\lambda)z + t = c \\ x + y + z + (1+\lambda)t = d \end{cases}$$