



## TD 15

### Suites numériques

**Exercice 1** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles convergentes. Etudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max(u_n, v_n)$ .

**Exercice 2** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles convergeant respectivement vers  $l$  et  $l'$  avec  $l < l'$ . Montrer qu'à partir d'un certain rang,  $u_n < v_n$ .

**Exercice 3** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs. On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ .

1. Montrer que si  $l < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
2. Montrer que si  $l > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
3. Montrer que si  $l = 1$ , on ne peut rien conclure.

**Exercice 4** Déterminer, si elle existe, la limite des suites suivantes.

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 2. $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$ | 3. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$    |
| 4. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$                  | 5. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$                | 6. $u_n = \frac{\sin(n)}{n + (-1)^{n+1}}$  |
| 7. $u_n = \frac{n!}{n^n}$                 | 8. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$              | 9. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ |

**Exercice 5** Déterminer la limite de la suite de terme général  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$

**Exercice 6** Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n!} (1! + 2! + \dots + n!).$$

**Exercice 7** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de limite  $l$ . On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}$

1. Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
2. Etablir que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_{2n} \geq \frac{v_n + u_n}{2}$ .
3. En déduire que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .

**Exercice 8** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ . En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$ .

**Exercice 9** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  La suite de terme général  $u_n = (1+a)(1+a^2) \dots (1+a^n)$  avec  $0 < a < 1$ .

1. Montrer que la suite est croissante.
2. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$ .
3. En déduire que la suite est convergente.

**Exercice 10** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle croissante telle que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Exercice 11** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle (ou complexe) telle que les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Exercice 12** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites déterminées par  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

1. Montrer que la suite  $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.
2. Prouver que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmético-géométrique.
3. Exprimer les termes généraux des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 13** Donner l'expression des suites récurrentes  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

1.  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ .
2.  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = -1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$ .
3.  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ .
4.  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1 + 4i$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$ .

**Exercice 14** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $A^2 + 2A - 3I_3$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$  tels que  $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$ . Donner une relation de récurrence entre  $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$  et  $\alpha_n, \beta_n$ .
3. Montrer que la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire l'expression de  $\alpha_n$  en fonction de  $n$ .
4. Donner  $A^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .



5. Montrer que  $A$  est inversible et donner  $A^{-1}$ .
6. Vérifier que la formule obtenue pour  $A^n$  est valable pour  $n = -1$ . Est-elle valable pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  ?

**Exercice 15** Soit  $\theta \in ]0, \pi[$ . Déterminer le terme général de la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2 \cos \theta u_{n+1} + u_n = 0$$

**Exercice 16** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$ .

- Justifier que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie.
- On souhaite montrer que les suites  $(w_n = u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n = u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes :
  - Montrer que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et que la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
  - Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$|w_{n+1} - t_{n+1}| \leq \frac{1}{4} |w_n - t_n|$$

- En déduire que les suites  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes.
- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
  - Résoudre l'équation  $x = \frac{1}{1+x}$  et en déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 17** On considère deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $0 < u_0 < v_0$  et

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} \end{cases}$$

Montrer que les suites sont convergentes et calculer leurs limites.

**Exercice 18** Etudier les suites définie par

- $u_0 = a \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$
- $u_0 \geq 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$
- $u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$

**Exercice 19** Etudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$$

**Exercice 20** Etudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n} + 35.$$

**Exercice 21** Etudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n(1 + u_n).$$

**Exercice 22** Etudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{2}}.$$

**Exercice 23** Etudier la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \neq 1$  et la relation  $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{-1+u_n}$

**Exercice 24** Etudier la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 > 0$  et la relation  $u_{n+1} = \frac{u_n+3}{2u_n}$

**Exercice 25** Etudier la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 > 0$  et la relation  $u_{n+1} = 2 + \ln(u_n)$

**Exercice 26** Etudier la suite  $(u_n)$  définie par la relation  $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$

**Exercice 27** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E_n : x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1$ .

- Montrer que l'équation  $E_n$  possède une unique solution  $x_n$  dans  $[1/2, 1]$ .
- Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
- Déterminer la limite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Exercice 28** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E_n : x^n \ln(x) = 1$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

- Montrer que l'équation  $E_n$  admet une solution unique  $x_n$  et que  $x_n \geq 1$ .
- Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et converge vers 1.

**Exercice 29** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ . Montrer que les suites extraites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes et en déduite que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Exercice 30** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $x_n$  l'unique solution de l'équation  $x^5 + nx - 1 = 0$ .

- Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie.
- Etudier la monotonie de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Montrer que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  puis donner un développement asymptotique de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à la précision  $\frac{1}{n^{16}}$ .