



## TD 18

### Espaces Vectoriels de dimension finie

#### Dimension et base

**Exercice 1** Soient  $G$  et  $F$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que si  $\dim F + \dim G > n$  alors  $F \cap G \neq \{0_E\}$ .

**Exercice 2** Déterminer la dimension et une base des sous-espaces vectoriels de  $E = \mathbb{R}_3[X]$  suivants

1.  $F_1 = \{P \in E \mid P(2) = 0\}$
2.  $F_2 = \{P \in E \mid P + P'' = 0\}$
3.  $F_3 = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$
4.  $F_4 = \left\{P \in E \mid \int_0^2 P(x) dx = 0\right\}$
5.  $F_5 = \left\{P \in E \mid \int_0^2 P(x) dx = 0, P(1) = 0\right\}$
6.  $F_6 = \{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}$
7.  $F_7 = \{P \in E \mid P(X+1) = 2P(X)\}$

**Exercice 3** Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère les vecteurs  $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, -1, 0)$ ,  $u_3 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $u_4 = (0, 0, 1, 0)$  et  $u_5 = (1, 1, 0, -1)$ . On pose  $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$  et  $G = \text{Vect}(u_4, u_5)$ . Quelles sont les dimensions de  $G, F, F + G$  et  $F \cap G$  ?

**Exercice 4** On considère  $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$  et  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t\}$ . Déterminer  $\dim E, \dim F, \dim(E+F), \dim(E \cap F)$ .

**Exercice 5** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On considère pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\varepsilon_i = \sum_{k=1}^i e_k$ .

1. Montrer que  $\mathcal{C}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  est une base de  $E$ .
2. Soit  $x \in E$ . Exprimer les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{C}'$  en fonction de ses coordonnées dans  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 6** Soit  $E$  l'ensemble des fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles qu'il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c) \cos(x)$$

1. Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Déterminer une base et la dimension de  $E$ .

**Exercice 7** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  l'ensemble des suites réelles  $p$ -périodiques, i.e. l'ensemble des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$$

Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et déterminer celle-ci. (on donnera à ce titre une base de  $E$ ).

#### Rang d'une famille de vecteur

**Exercice 8** Déterminer le rang des familles suivantes définies dans  $\mathbb{R}^4$  par :

1.  $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, -1, 1, -1)$  et  $u_3 = (1, 0, 1, 1)$ .
2.  $u_1 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $u_2 = (1, -1, 1, 0)$ ,  $u_3 = (2, 0, 1, 1)$  et  $u_4 = (0, 2, -1, 1)$ .

**Exercice 9** Dans  $\mathbb{R}_3[X]$ , on considère les polynomes :

$$P_1 = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3, \quad P_2 = 2 + 3X + 4X^2 + 5X^3, \quad P_3 = 1 + X + X^2 + X^3$$

$$P_4 = 1 - X + X^2 - X^3, \quad P_5 = 1 + 2X + X^2 + 2X^3$$

1. Déterminer le rang de la famille  $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ .
2. On note  $F = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$  et  $G = \text{Vect}(X^3)$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3[X]$ .

**Exercice 10** Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathcal{F}([-1, 1[, \mathbb{R})$  on considère les fonctions définies pour tout  $x \in ]-1, 1[$  par

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Quel est le rang de la famille  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  ?