



TD 19

Séries numériques

Calculs de sommes

Exercice 1 Etudier la nature des séries suivantes et en cas de convergence, calculer leurs sommes :

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 2n + 2} \right)$
2. $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$
3. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)n}$
4. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}$
5. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right)$
6. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{4^n}$
7. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^3 + 3n}{2^n}$
8. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{4n-1}{3^n}$
9. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n + 4 \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right]$
10. $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n + 4 \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right]$
11. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 - 3n + 1}{2^n}$
12. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{3^n}{n}$
13. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$
14. $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n+1}}$
15. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
16. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\text{ch}(n)}{n}$
17. $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-nx}, x \in \mathbb{R}$
18. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$
19. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{3 + n2^n}{4^{n+2}}$
20. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Exercice 2 On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.
Etudier la nature des séries suivantes et en cas de convergence, calculer leurs sommes :

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n!}$
2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{n!}$
3. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^3}{n!}$
4. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2n^2 - n + 1}{n!}$
5. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^3 - n + 2}{n!}$
6. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n^2 - n + 1)3^n}{n!}$
7. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 - 3n + 1}{n!}$
8. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2n + 1}{3^n n!}$
9. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{4(-1)^n}{n!}$

Exercice 3 On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_1 = -\frac{7}{6}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = -\frac{1}{6}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n.$$

Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge et calculer sa somme.

Séries alternées

Exercice 4 [Critère spécial des séries alternées] Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, décroissante et de limite nulle. On note, pour tout entier naturel n ,

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k.$$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^k a_k$ est convergente. On note S la somme de cette série.
3. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k - S \right| \leq a_{n+1}.$$

Indication : pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $S_{2p+1} \leq S \leq S_{2q}$.

4. Application : étudier la convergence des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$. Sont-elles absolument convergentes ?

Exercice 5 On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

1. Montrer que cette série n'est pas absolument convergente.
2. En remarquant que $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, calculer la somme de cette série.
3. En déduire un encadrement à 10^{-1} près de $\ln(2)$ par deux rationnels.



Séries à termes positifs

Exercice 6 La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$ est-elle convergente ?

Exercice 7 Soit a un réel positif ou nul. Discuter selon les valeurs de a , de la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a^n}{n}$.

Exercice 8 Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs. Montrer que les séries suivantes sont convergentes :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \max(u_n, v_n), \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Exercice 9 Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n^2 + 1) e^{-n}$
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - n}$
3. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(\frac{n^2 + n^4}{2n^4} \right)$
4. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^2}$
5. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^n}{n + 3^n}$
6. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a^n}{1 + a^n}, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
7. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(1 + \frac{\ln n}{n} \right)$
8. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos(n^2)}{n!}$
9. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\ln(1+n)}{\ln(1+3n)}$
10. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{3^n}$
11. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$
12. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2n} \right)$
13. $\sum_{n \geq 5} \sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1}}$
14. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

Comparaison série-intégrale

Exercice 10 En exploitant une comparaison avec une intégrale, établir que

$$1. \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n \sqrt{n} \quad 2. \ln(n!) \sim n \ln(n)$$

Exercice 11 Discuter suivant la valeur de β de la nature de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n (\ln(n))^\beta}$$

Ces séries sont connues sous le nom de séries de Bertrand.

Exercice 12 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$.

1. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est convergente.
2. Donner un équivalent du reste d'ordre N de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.

En voilà encore...

Exercice 13 Donner la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1+n^2}{n!}$
2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \arcsin \left(\frac{2n}{4n^2 + 1} \right)$
3. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3 + 2\sqrt{n} - 3 \ln n}$
4. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n}$
5. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$
6. $\sum_{n \geq 2} \ln \left(\frac{\text{ch} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{n} \right)} \right)$
7. $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{n + \cos n}{n^2 + (-1)^n}$
8. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n + (-1)^n \sqrt{n}}}$
9. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^{-(1+\frac{1}{n})}$
10. $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \left(\sqrt{n^4 + 1} - n^2 \right)$
11. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n} - {}^{n+1}\sqrt{n}$
12. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
13. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
14. $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\sqrt{n}}$

Exercice 14

1. Prouver la convergence de la série de terme général $\arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$.
2. Comparer ce terme général avec $\arctan(n+1) - \arctan(n)$
3. En déduire la valeur de la somme de la série étudiée.