



TD2

Fonctions réelles

Généralités

Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+x-2}{2x^3+7x^2+2x-3}}$.
2. $g : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.
3. $h : x \mapsto \ln(\cos(2x+\pi))$.
4. $i : x \mapsto \sqrt{\ln(x)-x^2+\frac{1}{2}}$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln((x-1)^2+2)$. Déterminer les ensembles suivants.

1. $f(\mathbb{R})$
2. $f([-1; 1])$
3. $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$
4. $f^{\leftarrow}([2; 3])$

Exercice 3 Décomposer les fonctions suivantes en composées de fonctions élémentaires et préciser la suite des espaces de départ et d'arrivée pour que la fonction composée considérée soit bien définie.

1. $f : x \mapsto \cos(e^{\sin(x)-1}) + 1$.
2. $g : x \mapsto \sqrt{\frac{-1}{\ln(1-4x^2)}}$.
3. $h : x \mapsto \ln^2(\cos(x - \frac{\pi}{4}) + 1)$.

Graphes d'une fonction

Exercice 4 Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |x-1| + 2|x+2|$.

Exercice 5 Dédurre des fonctions de références l'allure des graphes des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto (2x+3)^2 - 2$.
2. $g : x \mapsto 1 - \frac{2}{x-3}$.
3. $h : x \mapsto 2e^{\frac{x}{2}}$.
4. $i : x \mapsto -1 - \frac{\cos(x-1)}{2}$.
5. $j : x \mapsto 2|x+2| - 1$.

Propriétés

Exercice 6 Déterminer la parité des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto 2x^6 - 5x^4 + x^2 + 6$.
2. $f_2 : x \mapsto \ln(|x|)$.
3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{(x^3-2x)^3} \times \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}$.
4. $f_4 : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
5. $f_5 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
6. $f_6 : x \mapsto \left| 2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1) \right|$.
7. $f_7 : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
8. $f_8 : x \mapsto x^3 \frac{\sin(x)-x}{2+\cos^2(x)}$.

Exercice 7 Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissantes et T -périodiques, avec $T \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 Soient I un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ soit croissante sur I et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante sur I . Montrer que f est strictement décroissante sur I .

Continuité, dérivation

Exercice 9 Etudier le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes puis les dériver sur cet ensemble.

1. $f_1 : x \mapsto \cos^6(x)$.
2. $f_2 : x \mapsto \ln(\ln(x))$.
3. $f_3 : x \mapsto e^{\sin(x)}$.
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{(x^2+1)^3}$.
5. $f_5 : x \mapsto \frac{1+\sqrt{x}}{(x+1)^{3/2}}$.
6. $f_6 : x \mapsto x^2 e^{\frac{1}{x}}$.
7. $f_7 : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)$.
8. $f_8 : x \mapsto e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$.

Exercice 10 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions

$$f_\lambda : x \mapsto \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$$

Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles mais distinctes mais que les tangentes en 1 sont concourantes.



Fonction réciproque

Exercice 11 Soit $f :]1; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$, $x \mapsto x^2 - 1$. La fonction f est-elle bijective ?

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnu $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda = \frac{2x}{1+x^2}.$$

2. La fonction f est-elle surjective ? Déterminer $f(\mathbb{R})$.
 3. La fonction f est-elle injective ?
 4. Montrer que la fonction $g : [-1; 1] \rightarrow [-1; 1]$, $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est bijective.
 5. Retrouver ces résultats en étudiant les variations de f .

Exercice 13 En utilisant la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité, déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer la fonction réciproque.

1. $f :]1; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{x-1}$. 2. $f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$.
 3. $f :]1; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$. 4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - x$.
 5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. 6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Exercice 14 Etudier la ou les branche(s) infinie(s) des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x e^{-x}$. 2. $x \mapsto \frac{2x^2+1}{x^2+3}$. 3. $x \mapsto \frac{x^2+1}{2\sqrt{x-3}}$.
 4. $x \mapsto \frac{x^4+2x^3-1}{x^2+4}$. 5. $x \mapsto \frac{x^3+x+1}{x^2+4}$. 6. $x \mapsto x^2 \ln\left(\frac{x^2+2}{x}\right)$.
 7. $x \mapsto \frac{x^3+x^2-x}{x^2-1}$. 8. $x \mapsto \frac{x^2-x+1}{|x-1|-x}$. 9. $x \mapsto x + \sqrt{x}$.
 10. $x \mapsto x \frac{2\ln(x)+1}{\ln(x)}$.

Exercice 15 Soit $f :]0; +\infty[$, $x \mapsto 1 + x + 2\sqrt{x}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et qu'elle réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un ensemble à J à préciser.
 2. Déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in J$.

Etude d'une fonction

Exercice 16 Etudier les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$. 2. $x \mapsto e^{x \ln(x)}$. 3. $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.
 4. $x \mapsto \ln\left(\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$. 5. $x \mapsto e^{x^2 \ln(x)}$. 6. $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$.
 7. $x \mapsto x^2 + 1 - \frac{2}{x}$. 8. $x \mapsto (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$. 9. $x \mapsto x^2 e^{-x}$.
 10. $x \mapsto \frac{2\ln(x)+3}{x}$. 11. $x \mapsto \frac{x^2+x}{|x|+1}$. 12. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
 13. $x \mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. 14. $x \mapsto x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. 15. $x \mapsto x + \frac{\cos(x)}{x}$.

Exercice 17 Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer qu'elle est impaire.
 2. Calculer les limites de f et préciser les éventuelles asymptotes.
 3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
 4. Montrer que f est bijective.
 5. On pose $u = e^x - 1$ et $v = e^x + 1$. Exprimer e^x puis 1 en fonction de u et v . En déduire une expression de f' en fonction de f .
 6. Sans calculer f^{-1} , déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'$.
 7. Donner la fonction f^{-1} explicitement.

Exercice 18 Soit $f :]2; +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

1. Prouver que f réalise une bijection de $]2; +\infty[$ sur son ensemble image. On note g sa fonction réciproque.
 2. Sans calculer g , déterminer l'ensemble de dérivabilité de g , justifier que g admet une tangente verticale en 1 et déterminer g^{-1} .
 3. Donner une expression explicite de g et vérifier les résultats de la question précédente.
 4. Etudier la branche infinie de f , en déduire celle de g , puis représenter le graphe des fonctions f et g .

Exercice 19 Etudier les variations de la fonction $f(x) = \cos^5(x) + \sin^5(x)$.