



TD 20

Applications linéaires

Généralités

Exercice 1 Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x^2$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 4x - 3$
3. $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x^2}$
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto (y, x)$
5. $f_5 : \mathcal{C}^0([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}^0([0, 1]); f \mapsto \left(t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\right)$
6. $f_6 : \mathcal{C}^0([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto f(3/4)$
7. $f_7 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto 3x + 5y$
8. $f_8 : \mathcal{C}^0([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto f(1/4) - \int_{1/2}^1 f(t) dt$
9. $f_9 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$
10. $f_{10} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$
11. $f_{11} : \mathcal{C}'([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto \int_0^1 \ln(1 + |f(t)|) dt$
12. $f_{12} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$
13. $f_{13} : \mathcal{C}^0([0, 1]) \mapsto \mathcal{C}^1([0, 1]); f \mapsto \left(x \mapsto e^{-x} \int_0^1 f(t) dt\right)$
14. $f_{14} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
15. $f_{15} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + z/3)$
16. $f_{16} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto$ la solution du système d'équations $\begin{cases} 3u - v = x \\ 6u + 2v = y. \end{cases}$
17. $f_{17} : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}); f \mapsto (x \mapsto f'(x) + f(x) \cdot \sin x)$

Exercice 2 Soit $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$.
Montrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Exercice 3 Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E . Montrer que

1. $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$
2. $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f) \Leftrightarrow E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$

Exercice 4 Soit u et v deux endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que

$$v(\text{Im}(u)) \subseteq \text{Im}(u), \quad \text{et} \quad v(\text{Ker}(u)) \subseteq \text{Ker}(u)$$

On dit que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par v .

Applications linéaires en dimension finie

Exercice 5 Justifier qu'il existe une unique application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 telle que

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), \quad f(1, 1, 0) = (1, 0) \quad \text{et} \quad f(1, 1, 1) = (1, 1)$$

Donner l'expression de $f(x, y, z)$ en fonction de x, y, z et déterminer l'image et le noyau de f . Vérifier le théorème du rang.

Exercice 6 Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leurs noyaux et images :

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$.
3. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + iz$. (\mathbb{C} vu comme un \mathbb{R} -espace vectoriel).

Exercice 7 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ définie par $f(x, y) = (2x - 3y, x + y)$. Montrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^2 et déterminer son application réciproque.

Exercice 8 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application injective avec E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que pour toute famille (u_1, \dots, u_n) de vecteurs de E , on a

$$\text{rg}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \text{rg}(u_1, \dots, u_n)$$

Exercice 9 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E et f un endomorphisme de E . Montrer que $V \subseteq f(V) \Rightarrow f(V) = V$.

Exercice 10 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = 2f + 3\text{Id}_E$.

1. Démontrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1} .
2. Montrer que $\text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$



- Montrer que $\text{Im}(f - 3\text{Id}_E) \subseteq \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$
- On suppose dans cette question que E de dimension finie. Montrer que $E = \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.
- Retrouver le résultat de la question précédente lorsque E est de dimension quelconque.

Exercice 11 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Supposons que p est le plus petit entier tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- Soit $u \in E$. Montrer que la famille $(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre si et seulement si $u \notin \text{Ker}(f^{p-1})$.
- En déduire que $p \leq n$ puis que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- Si $n = p$, déterminer le rang de f .
- On considère la dérivation sur $E = \mathbb{R}_n[X]$. Proposer un $u \in E$ vérifiant les conditions de la question 1.

Exercice 12 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

$$1) E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) \quad 2) \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f) \quad 3) \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2).$$

Exercice 13 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E . Montrer que $\text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ puis que $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f-g)$.

Exercice 14 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \text{Im}(f^p)$ et $N_p = \text{Ker}(f^p)$.

- Montrer que $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et que $(N_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante (pour l'inclusion).
- Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.
- Soit r le plus petit entier vérifiant la propriété précédente. Montrer que pour tout $s \geq r$, on a $I_s = I_r$ et $N_s = N_r$.
- Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E .

Exercice 15 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad [f^2 = 0 \text{ et } n = 2\text{rg}(f)]$$

Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2n$ et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = 0$. On suppose que il existe $u_1, \dots, u_n \in E$ tels que $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ est une famille libre.

- Démontrer que $\text{rg}(f) \geq n$.
- Prouver que la famille (u_1, \dots, u_n) est libre.
- Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
- Démontrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 17 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM - MA. \end{array}$$

- Montrer que f_A est un endomorphisme.

$$2) \text{ Déterminer } \text{Im}(f_A) \text{ pour } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Projecteurs et symétries

Exercice 18 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \frac{1}{2}(-y + z, -2x + y + z, -2x - y + 3z) \end{array}$. Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 19 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \frac{1}{3}(x - 2y - 6z, -x + 2y - 3z, -x - y) \end{array}$. Montrer que f est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 20 Soient $E = \mathbb{R}^3$,

$$F = \text{Vect}((1, 1, 1)) \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}.$$

Montrer que F et G sont en somme directe et déterminer la projection et la symétrie sur G parallèlement à F .

Exercice 21 Soient E et F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $u \circ v = \text{Id}_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.



Applications linéaires et matrices

Exercice 22 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \rightarrow & AM. \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 23 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array}$. Montrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

Applications linéaires et polynômes

Exercice 24 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X) - P(X+1) \end{array}$.

- a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- b) Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le degré de $f(P)$ en fonction du degré de P .
- c) Déterminer le noyau de f .
- d) Montrer que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 25 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]; P(X) \mapsto P(X+1) + P(X)$

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour tout $k = 0, \dots, n$ il existe un unique $E_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $E_k(X+1) + E_k(X) = X^k$.
3. Montrer que pour tout $k = 1, \dots, n$, $E'_k = kE_{k-1}$.

Exercice 26 Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer son noyau et son image.

Applications linéaires et suites

Exercice 27 Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles. Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on définit les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$ et

$$w_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ u_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que les applications

$$f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

sont des endomorphismes de E .

2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g .

Exercice 28 Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_n\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
2. Soit $f : F \rightarrow \mathbb{C}^3; (u_n) \mapsto (u_0, u_1, u_2)$. Démontrer que F est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de F .
3. Déterminer une base de F constituée de suites géométriques.
4. Soit $g : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}; (u_n) \mapsto (v_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n + u_{n+1} + u_{n+2}}{3}$.
 - (a) Démontrer que \tilde{g} la restriction de g à F est un endomorphisme de F .
 - (b) Déterminer le noyau et l'image de cet endomorphisme.

Applications linéaires et intégrales

Exercice 29 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère $\phi, \psi \in \mathcal{F}(E)$ définie par : pour tout $f \in E$

$$\phi(f) = f' \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1. Montrer que ϕ et ψ sont des endomorphismes de E .
2. calculer $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$.
3. Déterminer images et le noyaux de ϕ et ψ .

Exercice 30 Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on définit la fonction $\Phi(f)$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \Phi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad \Phi(f)(0) = f(0).$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E .
2. Φ est-il injectif? Surjectif?