TD 25
Couples de variables aléatoires

Espérance, variance

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ dont la loi est donnée par :

k	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$1/6$	$1/4$	$1/6$	$1/6$	$1/4$

1. Calculer son espérance et sa variance.
2. Soit $Y = X^2$. Donner la loi de Y.

Exercice 2 Un tiroirs possède 5 paires de chaussettes bleues et 3 paires de chaussettes blanches. On choisit au hasard et sans remise les paires de chaussettes une à une jusqu'à l'obtention d'une paire de chaussettes bleues. Soit X le nombre de tirage nécessaires.

1. Donner les valeurs prises par X. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3 On lance simultanément deux dés équilibrés et on note X le maximum des deux chiffres obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $\{1, \ldots, 20\}$.

1. Quelle est la loi de $\sup(X, 2) - 1$?
2. Quelle est la loi de $20 - X$?

Exercice 5 Un jeu consiste à lancer une bille dans un circuit comportant cinq butoirs : A, B, C, D, E marqués respectivement de 1, 2, 3, 4, 5 points. La bille frappe au hasard un des butoirs A, B ou C puis : de A, elle frappe au hasard B, D ou E ; de B, elle frappe au hasard D ou E ; de C, elle frappe E ; de D ou de E, elle sort du circuit. Le joueur totalise alors les points marqués sur les butoirs heurtés par la bille. Soit T la variable aléatoire ainsi définie.

1. Déterminer la loi de probabilité de T .
2. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 6 Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 7 Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. Un joueur tire simultanément 3 boules au hasard. On suppose qu'il gagne un euro par boule blanche tirée et perd deux euros par boule noire tirée. On note X son gain. Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 8 Le joueur lance deux dés. S'il sort 7, il gagne 5 euros, sinon il perd 1 euro. le jeu est-il équitable ?

Exercice 9 D'un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geqslant 3$), on en tire successivement 3, au hasard et sans remise. On désigne par X le numéro du 3^{e} jeton. Déterminer la loi de probabilité de X, sa moyenne et sa variance.

Exercice 10 Une urne contient 2^n papiers sur lesquels sont reproduits les 2^n parties d'un ensemble à n éléments. On tire au hasard un papier et on appelle X la variable aléatoire réelle égale au cardinal de la partie tirée. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 11 X est une variable uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On définit la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^X$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 12 Dans une urne, il y a 5 jetons marqués $+2$ et 7 jetons marqués -1, on tire sans remise 4 jetons. On considère la somme des jetons tirés. En moyenne qu'obtient-on ?

Exercice 13 Un cavalier a $n \in \mathbb{N}^*$ haies à sauter numérotées de 1 à n, il s'arrête au premier saut non réussi. On suppose que s'il se présente devant la $k^{\text{ème}}$ haie, la probabilité pour qu'il réussisse son saut est $q_k \in]0, 1[$. On note X le nombre de sauts réussis, ainsi X prend pour valeur 0 s'il échoue à la première haie.

1. Déterminer la loi de X.
2. On suppose que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $q_k = q$ (constante). Déterminer la loi de X en fonction de q et $p = 1 - q$.
3. A l'aide de la fonction génératrice, calculer l'espérance de X.
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X)$.

Exercice 14 Une urne contient n boules vertes et n boules jaunes. On tire les boules une à une, sans remise jusqu'à obtenir la dernière boule jaune. Soit X le nombre de tirages nécessaires.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire que $\sum_{k=n-1}^{2n-1} \binom{k}{n-1} = \binom{2n}{n}$
3. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 15 Un sac contient n jetons numérotés de 1 à $n (n \geqslant 3)$. On extrait 3 jetons simultanément, on note X, Y, Z les trois numéros obtenus avec $X < Y < Z$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer son espérance.

Exercice 16

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$, montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$
2. On effectue trois tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n $(n \geqslant 3)$. Soit X le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 17 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire les jetons un à un sans remise jusqu'à obtention d'un numéro supérieur au précédent. On note L la longueur de la suite des résultats obtenus (On posera $L = n+1$ si on tire les n numéros dans l'ordre strictement décroissant).

1. Déterminer la loi de L (on pourra étudier les événements $(L > k)$).
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(L)$.

Exercice 18 Une feuille d'exercices contient k erreurs typographiques. Lors d'une relecture, une erreur a la probabilité $p = 0,75$ d'être détectée.

1. Calculer le nombre moyen d'erreurs détectées (on traduira au préalable le problème dans le vocabulaire des variables aléatoires).
2. Calculer ensuite cette espérance si le texte est soumis à 47 relectures.

Exercice 19 Soit une urne contenant n^2 boules numérotées de 1 à n^2. On appelle carré parfait un entier carré d'un nombre entier $(0, 1, 4, 9, \ldots$ sont des carrés parfaits).

1. On tire simultanément p boules.
   (a) Quelle est la probabilité qu'un et un seul numéro tiré soit un carré parfait ?
   (b) On note X le nombre de carrés parfaits obtenus lors des p tirages. Quelle est la loi de X ?
2. On tire à présent deux boules simultanément. On note Z la variable aléatoire réelle égale à la valeur absolue de la différence des deux numéros tirés.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   (b) Pour $A \leqslant j \leqslant n$, déterminer $\mathbb{P}\left(Z = j^2\right)$.
   (c) Quelle est la probabilité que Z soit un carré parfait ?

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce de monnaie n fois de suite. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Thebychev, trouver une condition sur l'entier n pour que le rapport du nombre de "face" obtenus sur le nombre de lancers soit strictement compris entre $0,4$ et $0,6$ avec une probabilité supérieure à $0,9$.

Exercice 21 Un dé à six faces amène le 6 avec la probabilité $p \in]0,1[$ à chaque lancer. On lance le dé une infinité de fois et on note X_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où le 6 est sorti au cours des $6n$ premiers lancers $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1. Donner la loi de X_n, son espérance et sa variance.
2. Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour X_n.
3. On suppose le dé équilibré. D'après l'inégalité, à partir de quelle valeur de n est-on sur d'obtenir une proportion de 6 dans un intervalle de longueur 10^{-2} autour de $1/6$ avec une probabilité d'au moins $1/2$

Exercice 22 On lance 1000 fois une pièce équilibrée. On note X le nombre de piles obtenus. Donner en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de la probabilité pour que $|X - 500|$ soit supérieur à 50.

Exercice 23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce de monnaie n fois de suite. À l'aide l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver une condition sur l'entier n pour que la fréquence des face obtenus soit strictement compris entre $0,4$ et $0,6$ avec une probabilité supérieure ou égale à $0,9$.

Exercice 24 (Piège : do not use Tcheby) Une population de 10^9 cellules est soumise à une suite de n séances d'irradiation. On suppose que chaque cellule a une réaction indépendante et qu'à chaque séance, la probabilité pour qu'une cellule soit tuée est $0,5$. Combien de séance faut-il faire pour que la probabilité d'avoir tué toutes les cellules soit supérieure à $0,9$?

Exercice 25 Une urne contient une proportion inconnue p de boules blanches. On y effectue une série de n tirages d'une boule avec remise et on approxime p par la proportion Z_n de boules blanches sur les n tirages.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(|Z_n - p| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4\,\varepsilon^2}$.
   Indication : Démontrer que $\forall x \in]0,1[,\ 0 < x(1-x) < \frac{1}{4}$
2. En déduire une condition sur n pour que l'approximation donne une valeur approchée de p à $0,01$ près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Couples de variables aléatoires réelles

Exercice 26 Dans un jeu télévisé chaque candidat tire trois questions parmi neuf : trois scientifiques, trois d'histoire et trois littéraires. Soit X le nombre de questions scientifiques tirées et Y le nombre de questions littéraires.

1. Donner la loi du couple (X, Y) ainsi que ses lois marginales.
2. Déterminer la loi et l'espérance de X sachant $(Y = 1)$.

Exercice 27 On lance un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4. Si D est le nombre obtenu, on lance une pièce D fois. Soit X le nombre de pile. Quelle est la loi du couple (D, X) ?

Exercice 28 On lance deux dés équilibrés ayant n faces numérotées de 1 à n. Quelle est la probabilité qu'il y ait un écart de 1 entre les deux dés ?

Exercice 29 On tire successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant n boules blanches et m boules noires, $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit X (respectivement Y) la variable égale à 1 si la première (respectivement la deuxième) boule tirée est blanche. Déterminer la loi du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales.

Exercice 30 X et Y sont 2 variables aléatoires réelles indépendantes, $n \in \mathbb{N}$. $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, n \rrbracket), Y \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Déterminer pour $r \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = r)$

Exercice 31 Soient X et Y deux variable aléatoire réelle de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Soient $U = X + Y$; $V = X - Y$

1. Donner la loi du couple (U, V).
2. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 32 X et Y sont 2 variables aléatoires réelles indépendantes, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$; $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m, p)$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Déterminer pour $r \in \llbracket 0, n + m \rrbracket$ la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = r)$.

Exercice 33 Soient X_1 une variable uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$, X_2 une variable uniforme sur $\{-1, 1\}$ et $Z = X_1 X_2$. On suppose X_1 et X_2 indépendantes.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, Z).
2. Les variables X_1 et Z sont- elles indépendantes ? Déterminer leur covariance.

Exercice 34 On lance trois pièces équilibrées. Soit X le nombre de piles obtenus et Y la variable qui vaut 1 si on a obtenu plus de faces que de piles, 0 sinon.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).

Exercice 35 On choisit au hasard un nombre n entre 1 et 1000, puis un nombre entre 1 et n. On souhaite savoir ce que l'on obtient en moyenne pour ce second nombre. On note X la variable aléatoire réelle correspondant au premier nombre choisi et Y au deuxième nombre.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de Y . (On ne cherchera pas à calculer les sommes).
3. Répondre enfin à la question posée en introduction.

Exercice 36 On dispose de deux urnes. La première, U_1, contient $n + 1$ jetons numérotés de 0 à n ; la seconde, U_2, contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard un jeton de l'urne U_1 et on note N le numéro obtenu ; puis on tire une poignée de N jetons de l'urne U_2.

1. Déterminer l'espérance et la variance de N.
2. Soit X_i la variable aléatoire réelle prenant la valeur 1 si le jeton numéro i de l'urne U_2 a été tiré, et la valeur 0 sinon.
   (a) Quelle est la loi de X_i, son espérance et sa variance ?
   (b) Déterminer la covariance des couples (X_i, X_j) pour $i \neq j$. Ces variables aléatoires réelles sont-elles indépendantes ?

Exercice 37 n personnes se répartissent dans trois hôtels, H_1 (1 étoile), H_2 (2 étoiles) et H_3 (3 étoiles) . On note X_i le nombre de personnes choisissant l'hôtel H_i. Chaque personne choisit son hôtel au hasard avec une probabilité proportionnelle au nombre d'étoiles.

1. Calculer la loi des X_i, donner leur espérance et leur variance.
2. Calculer la loi puis la variance de $X_1 + X_2$.
3. En déduire $\text{Cov}(X_1, X_2)$.
4. Déterminer la loi conjointe du triplet (X_1, X_2, X_3)

Exercice 38 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs, indépendantes, de même espérance m, et de même écart-type σ. On pose

$$T_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} \sigma(T_n)$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|T_n - m| \geqslant \varepsilon) = 0$