



TD 27

Géométrie de l'espace

Changement de repère

Exercice 1 Dans l'espace muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $\Omega(1, 2, -1)$ et les vecteurs $\vec{u}(1, 2, 1)$, $\vec{v}(-1, 0, 3)$ et $\vec{w}(2, 2, -1)$. On note \mathcal{B} la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une base. On la note \mathcal{B}' .
2. Ecrire les formules de changements de bases entre \mathcal{B} et \mathcal{B}' .
3. Soit $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Ecrire les formules de changements de repères entre \mathcal{R} et \mathcal{R}' .
4. Donner sont les coordonnées de O dans \mathcal{R} et les coordonnées de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dans \mathcal{B}' .
5. Soient $A(3, 4, 5)_{\mathcal{R}}$ et $B(1, 3, -2)_{\mathcal{R}'}$. Donner les coordonnées de A dans \mathcal{R}' et celle de B dans \mathcal{R} .
6. Soient $\vec{a}(2, 1, 3)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{b}(-4, 1, 3)_{\mathcal{B}'}$. Donner les coordonnées de \vec{a} dans \mathcal{B}' et celles de \vec{b} dans \mathcal{B} .

Produit scalaire, vectoriel et mixte : propriétés algébriques

Exercice 2 Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs. Montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}$

Exercice 3 Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs. Exprimer $\det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u})$ en fonction de $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 4 Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et \vec{s} quatre vecteurs. Montrer les relations suivantes :

1. $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \wedge \vec{s} \rangle = \langle \vec{s}, \vec{v} \rangle \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{s} \rangle \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$
2. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{s}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{s}) \vec{w} - \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \vec{s}$

Exercice 5 Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs.

Montrer que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Exercice 6 soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tel que $\vec{u} \neq \vec{0}$. On désire résoudre le problème de la division vectorielle, c'est à dire trouver un vecteur \vec{x} tel que : $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$

1. Montrer que si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \neq 0$, il n'y a pas de solution. On suppose alors que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.
2. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $\vec{x}_0 = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v}$ soit solution.
3. Déterminer alors toutes les solutions.

Exercice 7 Soient M, A, B, C quatre points de l'espace.

1. Montrer que $\vec{MA} \wedge \vec{MB} + \vec{MB} \wedge \vec{MC} + \vec{MC} \wedge \vec{MA} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$
2. Déterminer l'ensemble des points vérifiant : $\vec{MA} \wedge \vec{MB} + \vec{MB} \wedge \vec{MC} = 2\vec{MC} \wedge \vec{MA}$

Plans et droites

Exercice 8 On considère le plan \mathcal{P} dirigé par $\vec{u}(1, -1, 2)$ et $\vec{v}(2, 1, 3)$ et passant par $A(3, 4, -1)$. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de \mathcal{P} .

Exercice 9 On considère la droite \mathcal{P} passant par $A(1, 1, 1)$ et dirigée par $\vec{d}(1, 1, 1)$.

1. Donner un système d'équations paramétriques de \mathcal{P}
2. Donner un système d'équations cartésiennes de \mathcal{P}

Exercice 10 On considère les plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} d'équations $2x - 4y + 3z + 5 = 0$ et $x - 2y + 3z - 2 = 0$.

1. Justifier que les plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} ne sont pas parallèles.
2. Donner une paramétrisation de leur intersection \mathcal{I} .
3. Donner une équation cartésienne du plan \mathcal{R} passant par $A(2, -2, 0)$ et perpendiculaire à \mathcal{P} et à \mathcal{Q} .

Exercice 11 On considère la droite \mathcal{P} passant par $I(2, 2, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1, -3, 1)$.

1. Ecrire un système d'équations paramétriques de \mathcal{P} .
2. Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{S} orthogonal à \mathcal{P} et passant par $A(3, -2, 1)$.
3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur \mathcal{P} .

Exercice 12 Vérifier que les points $A(3, 2, 1)$, $B(4, -1, 3)$ et $C(-1, 3, 2)$ ne sont pas alignés. Former une équation cartésienne du plan qui les contient.

Exercice 13 Donner une équation paramétrique de la droite \mathcal{P} définie par :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 4z - 6 = 0 \end{cases}$$

Exercice 14 On considère les plans \mathcal{P} et \mathcal{Q} d'équations respectives $3x - 4y + 1 = 0$ et $6x - 2y - 3z + 2 = 0$. Déterminer l'ensemble des points équidistants de \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

Exercice 15 Calculer :

1. La distance du point $A(1, 2, 1)$ au plan $\mathcal{P} : x - y + z = 2$.

2. La distance du point $B(1, 0, -1)$ à la droite \mathcal{D} paramétrée par $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.



3. La distance du point $C(0, 1, 2)$ à la droite Δ définie par $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$.
4. On se donne les droites $\mathcal{D} : \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y - z - 1/2 = 0 \end{cases}$.

Déterminer la perpendiculaire commune à \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

5. Calculer la distance entre les droites

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x - 2y + 3z = 1 \end{cases}.$$

6. Même question avec $\mathcal{D} : \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$. Déterminer de plus une équation de Δ leur perpendiculaire commune, les points $H = \mathcal{D} \cap \Delta$ et $H' = \mathcal{D}' \cap \Delta$ puis vérifier que $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = HH'$.

Exercice 16 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A(1, 1, a)$. On considère les quatre plans d'équations :

$$\mathcal{P}_1 : x + y - 1 = 0, \quad \mathcal{P}_2 : y + z - 1 = 0, \quad \mathcal{P}_3 : x + z - 1 = 0, \quad \mathcal{P}_4 : x - y + z = 0.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que les projections orthogonales de A sur les quatre plans soient quatre points coplanaires.

Exercice 17 Soit \mathcal{D} la droite d'équation $\begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 5z + 4 = 0 \end{cases}$ et A le point de coordonnées $(1, 1, 1)$. Déterminer les plans qui contiennent \mathcal{D} et dont la distance à A vaut 1.

Exercice 18 Soit $A(1, 2, 1)$, $B(2, 1, -1)$, $C(1, 0, 1)$ et $D(3, 2, 1)$. Déterminer le volume du tétraèdre $(ABCD)$.

Sphères

Exercice 19

- Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 22 = 0$ est l'équation d'une sphère \mathcal{S} dont on déterminera le centre et le rayon.
- Etudier l'intersection de \mathcal{S} avec le plan d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$.

Exercice 20 Soient $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$, $C(3, 1, 2)$ et $D(1, 0, -1)$.

- Chercher le centre et le rayon de la sphère \mathcal{S} circonscrite à $ABCD$.
- Donner une équation cartésienne du plan tangent à \mathcal{S} en A .

Exercice 21 Déterminer l'équation de la sphère contenant les cercles d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2 \end{cases}$$

Exercice 22 On considère les ensembles d'équations :

$$\delta : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z + 5/2 = 0, \quad \delta' : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$$

$$\delta'' : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 8 = 0, \quad \mathcal{P} : x + 2y - z - 2 = 0, \quad \mathcal{P}' : 3x - y + 2z + 10 = 0$$

- Identifier chacun de ces ensembles.
- Déterminer $\delta \cap \mathcal{P}$, $\delta' \cap \mathcal{P}'$, $\delta \cap \delta'$ et $\delta \cap \delta''$.

Problème

Exercice 23 Soit a un réel positif. Dans l'espace \mathcal{E} , on considère un carré $(ABCD)$ dont la longueur des cotés est a .

On note \mathcal{P} le plan affine portant le carré $(ABCD)$ et \mathcal{D} la droite perpendiculaire à \mathcal{P} en A .

Sur \mathcal{D} , on considère un point M différent de A .

(Indication : fixer un repère orthonormé direct, adapté au problème)

- La perpendiculaire en M au plan (MBC) rencontre le plan \mathcal{P} en un point R .
 - Faire une figure dans laquelle la droite \mathcal{D} apparaît comme verticale.
 - Montrer que R appartient à la droite (AB) .
- La perpendiculaire en M au plan (MCD) rencontre le plan \mathcal{P} en un point S .
 - Quel est le plan médiateur Π de R et S (i.e. l'ensemble des points équidistants de R et S). Justifier la réponse.
 - En utilisant la réflexion par rapport à Π , en déduire que S appartient à la droite (AD) et donner la nature du triangle (ARS) .
 - Montrer que la droite (MC) est perpendiculaire au plan (MRS) .
- On note K le milieu du segment $[RS]$.
 - Quel est le lieu géométrique du point K lorsque M décrit la droite \mathcal{P} privée de A . Placer ce lieu en rouge sur le dessin.
 - La hauteur issue de A du triangle (MAK) rencontre le coté $[MK]$ en H . Montrer que (AH) est la hauteur issue de A du tétraèdre $(ARMS)$.
 - Montrer que H est l'orthocentre du triangle (MRS) .