Chapitre VI : Fonctions usuelles

I La fonction logarithme

I.1 Définition

Vous avez vu en lycée la construction de la fonction exponentielle comme l'unique solution de l'équation différentielle $f'-f=0$ telle que $f(0)=1$. Cependant l'existence était admise et relève d'un résultat que vous ne verrez qu'en seconde année. Notre approche sera donc différente. Nous commençons par définir le logarithme et la fonction exponentielle constituera la réciproque du logarithme.
Nous verrons dans un prochain chapitre que si f est une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $a \in I$ alors $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a. On appelle ce résultat le théorème fondamental de l'analyse. Nous allons revoir ce résultat dans un exemple particulier pour construire le logarithme.
Pour tout $p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $x \mapsto x^p$ admet pour primitive la fonction $x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$. Vous notez que seule la valeur $p=-1$ pose problème. Pourtant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci peut être une motivation pour introduire la définition suivante.

Définition I.1

On appelle **logarithme népérien**, notée ln, la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 1 :

1. Par définition, $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.
2. Historiquement le logarithme népérien a été introduit pour la qualité de ses propriétés algébriques transformant un produit en somme. En l'absence d'ordinateur, le calcul d'une somme est nettement plus aisé que le calcul d'un produit.

I.2 Continuité et dérivabilité

Proposition I.2

La fonction logarithme est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. *Continuité.* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $h \in]-x;+\infty[$,

$$\ln(x+h) - \ln(x) = \int_1^{x+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Premier cas $h \geqslant 0$. Par positivité de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait que $\ln(x+h)-\ln(x) \geqslant 0$. De plus par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$0 \leqslant \ln(x+h) - \ln(x) = \int_x^{x+h} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+h} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{h}{x}.$$

Deuxième cas $h \leqslant 0$, alors $\ln(x+h)-\ln(x) = -\int_{x+h}^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$. De plus par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, (attention au signe moins qui inverse l'inégalité)

$$0 \geqslant \ln(x+h) - \ln(x) \geqslant -\int_{x+h}^{x} \frac{1}{x+h}\,\mathrm{d}t = \frac{h}{x+h}.$$

Ainsi, on obtient que pour tout $h \in \,]-x\,;\,x[$,

$$-\frac{|h|}{x-|h|} \leqslant \ln(x+h)-\ln(x) \leqslant \frac{|h|}{x}.$$

Donc par le théorème d'encadrement, quand $h \to 0$, on obtient

$$\lim_{h\to 0} \ln(x+h)-\ln(x) = 0.$$

Donc la fonction logarithme est continue en x. Ceci étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Dérivabilité. On affine nos précédentes inégalités. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $h \in]-x;+\infty[\setminus\{0\}$, notons d'abord que $\frac{1}{x} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\frac{1}{x} - \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{t-x}{tx}\,\mathrm{d}t.$$

Donc, si $h > 0$, $0 \leqslant t-x \leqslant h$ pour tout $t \in [x;x+h]$. Or $hxt > 0$ pour tout $t \in [x;x+h]$ Donc

$$0 \leqslant \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{h}{tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_x^{x+h}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Or nous avons déjà vu que pour $h > 0$, $\int_x^{x+h}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{h}{x}$. Donc

$$0 \leqslant \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} \leqslant \frac{h}{x^2}.$$

En procédant de même, on peut montrer que, si $h < 0$,

$$0 \geqslant \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} \geqslant \frac{h}{x\,(x+h)}.$$

Donc globalement, pour tout $h \in]-x;x[\setminus\{0\}$,

$$-\frac{|h|}{x\,(x-|h|)} \leqslant \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} \leqslant \frac{|h|}{x^2}$$

Et par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \frac{1}{x}.$$

Donc la fonction logarithme est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

$\square$

Exercice 1. Calculer la dérivée de la fonction $f : \begin{cases}]-1;1[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{cases}$.

Corollaire I.3

La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la stricte positivité de sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\square$

I.3 Propriétés algébriques

Proposition I.4

Soient $x \in]0;+\infty[$, $y \in]0;+\infty[$ et $p \in \mathbb{Z}$.

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
3. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
4. $\ln(x^p) = p\ln(x)$.

Démonstration.

1. Soit $y > 0$ un réel fixé. Considérons la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y) \end{cases}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables et pour tout $x > 0$,
$$g'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0.$$
Donc la fonction g est constante. De plus pour $x = 1$, on a $g(1) = \ln(y) - \ln(1) - \ln(y) = 0$. Donc pour tout $x > 0$, $\ln(xy) - \ln(x) - \ln(y) = 0$.
2. Soit $x > 0$. Le réel $y = \frac{1}{x}$ est aussi strictement positif. Donc d'après le point précédent, $\ln(xy) = \ln(1) = 0 = \ln(x) + \ln(y) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
3. Soit $x > 0$ et $y > 0$, on a, en utilisant le point 1, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$. En utilisant alors le point 2, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
4. Fixons $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la proposition P_n : « $\ln(x^n) = n\ln(x)$ ». Démontrons que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
   - Si $n = 0$, alors $\ln\left(x^0\right) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$. Donc P_0 est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie. Alors, d'après le point 1 avec $y = x^n > 0$,
   $$\ln\left(x^{n+1}\right) = \ln(x \times x^n) = \ln(x) + \ln(x^n).$$
   Puisque P_n est vraie,
   $$\ln\left(x^{n+1}\right) = \ln(x) + n\ln(x) = (n+1)\ln(x).$$
   Donc P_{n+1} est vraie. Nous avons donc montré que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.
   - Au bilan, on conclut que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Soit maintenant $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Puisque $-p \in \mathbb{N}$, par ce qui précède $\ln(x^{-p}) = -p\ln(x)$. Or d'après le point 2, $\ln(x^{-p}) = \ln\left(\frac{1}{x^p}\right) = -\ln(x^p)$. Donc $-\ln(x^p) = -p\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x^p) = p\ln(x)$. Conclusion, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^p) = p\ln(x)$.

□

I.4 Limites remarquables

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Discuter suivant les valeurs de a de la limite de la suite $(\ln(a^n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition I.5

La fonction logarithme vérifie les limites remarquables suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Démonstration.

1. Puisque la fonction logarithme est strictement croissante, soit la fonction logarithme converge vers une limite $l \in \mathbb{R}_+^*$ soit la fonction logarithme diverge vers $+\infty$ (mais ne peut pas avoir de par sa croissance un comportement plus exotique comme une oscillation quelconque). Ce résultat de la limite monotone est intuitif mais sera démontré dans un chapitre ultérieur. Démontrons que le logarithme n'est pas borné c'est à dire que pour tout $M > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln(x) > M$. Fixons $M > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (cf propriété précédente) $\ln(2^n) = n\ln(2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \ln(2) > M$. Donc en prenant $x = 2^{n_0}$, on a bien trouvé un réel tel que $\ln(x) > M$. Ainsi la fonction logarithme est non-bornée et croissante et donc
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

2. Pour tout $x > 0$, $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\ln\left(\frac{1}{x}\right).$$
Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$. Donc par composition de limites et le point précédent, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$.

3. Posons $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{cases}$. La fonction g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$
Donc $g'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \ln(x) \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \ln(x)$. La fonction logarithme est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$, $\ln(1) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. Donc d'après le théorème de la bijection, $\ln([1; +\infty[) = [0; +\infty[$ et même il existe un unique réel, notons-le e tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$. Ainsi $g'(x) \geqslant 0 \iff \ln(\mathrm{e}) \geqslant \ln(x)$. Par croissance de la fonction logarithme, on en déduit que $g'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e} \geqslant x$. De plus $g(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$. On obtient donc le tableau de variation de g :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$x \mapsto g(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	

On constate que la fonction est majorée et admet même un maximum lorsque $x = \mathrm{e}$ qui vaut $\frac{1}{\mathrm{e}}$. Donc pour tout $x > 0$,
$$\frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$
Notons que par croissance de la fonction logarithme, pour tout $x > 1$, $\frac{\ln(x)}{x} \geqslant 0$. Donc pour tout $x > 1$,
$$0 \leqslant \frac{\ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\mathrm{e}}.$$
Finalement, par le théorème d'encadrement, on en déduit que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

4. L'idée est exactement la même que pour démontrer le point 2, en posant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$,
$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u} \ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0.$$

5. On reconnaît la dérivée de la fonction logarithme en 1 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \ln'(1) = 1.$$

□

Remarque 2 : Par la continuité et la stricte croissance de la fonction logarithme, il existe un unique réel $\mathrm{e} \in]0;+\infty[$ tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$. Ce nombre s'appelle la constante de Neper.

Corollaire I.6

Le graphe de fonction logarithme a

- une asymptote verticale $x = 0$ en 0,
- une tangente d'équation $y = x - 1$ au point $(1;0)$,
- une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

Proposition I.7

Pour tout $x \in]-1;+\infty[$,

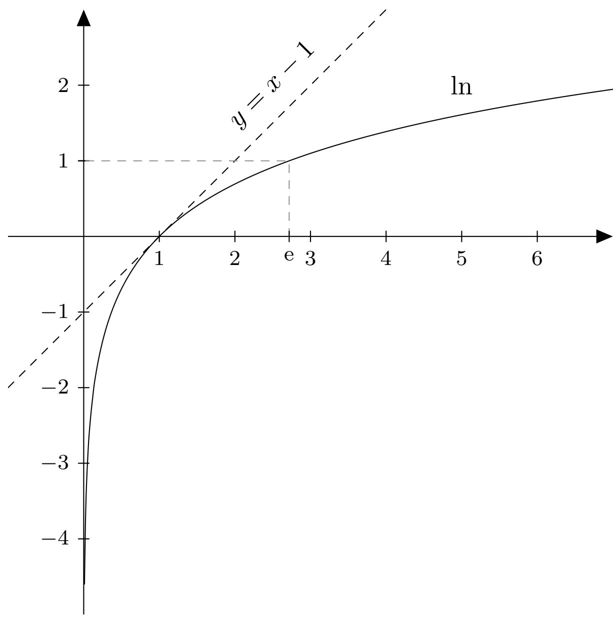
$$\ln(1+x) \leqslant x.$$

I.5 Graphe et variations

De notre étude précédente, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

Ainsi que son graphe :



II La fonction exponentielle

II.1 Définition et premières propriétés

La fonction logarithme est continue, strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $f(]0;+\infty[)=\mathbb{R}$. Donc d'après le théorème de la bijection, la fonction logarithme est une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Définition II.1

On appelle **fonction exponentielle**, noté exp, la fonction réciproque du logarithme népérien : $\exp : \mathbb{R} \to]0;+\infty[$.

Proposition II.2

- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$.
- La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Démonstration. Le théorème de la bijection appliqué à la fonction logarithme assure que la fonction exponentielle est une fonction continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Donc d'après le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, on sait que la fonction exponentielle est dérivable sur $\ln\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x).$$

□

Proposition II.3

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
2. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
3. $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
4. $\forall p \in \mathbb{Z},\ \exp(px) = (\exp(x))^p$.

Démonstration. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en utilisant les propriétés du logarithme, on a $\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x+y$. Donc en composant par l'exponentielle, on obtient que $\exp(\ln(\exp(x)\exp(y))) = \exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.
En procédant de même, on établit les autres affirmations.

□

Rappelons que par définition, e est l'unique réel tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$. De plus la fonction exponentielle est la fonction qui à tout réel associe son unique antécédent par le logarithme. Donc en particulier $\exp(1) = \mathrm{e}$.

Notation

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{e}^x = \exp(x)$. La fonction exponentielle est donc notée $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Remarque 3 : La notation est compatible avec la fonction puissance sur les entiers naturels. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{e}^n = \underbrace{\mathrm{e} \times \mathrm{e} \times \cdots \times \mathrm{e}}_{n \text{ fois}} = \exp(n).$$

En effet d'après la proposition précédente $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$. Elle est de même compatible avec la fonction puissance sur les entiers relatifs.

II.2 Limites remarquables

Proposition II.4

La fonction exponentielle admet les limites remarquables suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$.

Démonstration. Les limites aux bornes de la fonction exponentielle sont des conséquences du théorème de la bijection. Redémontrons-les d'une autre façon.

1. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$. Posons $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^0 = 1$ (car $\ln(1) = 0$). Donc pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1$ et pour tout $x \leqslant 0$, $\mathrm{e}^x \leqslant 1$. On en déduit le tableau de variation de la fonction g que l'on complète avec la valeur $g(0) = \mathrm{e}^0 - 1 = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$x \mapsto g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En conséquence, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$ et donc $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$. Par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

2. Lorsque $x \to -\infty$, on a $u = -x \to +\infty$. Donc
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{u\to+\infty} \mathrm{e}^{-u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^u} = 0.$$

3. On a vu dans le point 1 que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1 \geqslant x$. Donc $\frac{\mathrm{e}^x}{x} \geqslant 1$ pour tout $x > 0$ ou encore $\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} \geqslant 1$ pour tout $x > 0$. Alors
$$\frac{\mathrm{e}^x}{x} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2}.$$
Dans la dernière inégalité, nous avons utilisé la positivité de $\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2} = +\infty$, donc par comparaison,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty.$$

4. A l'aide du changement de variable $u = -x$,
$$\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = \lim_{u\to+\infty} -u\,\mathrm{e}^{-u} = -\lim_{u\to+\infty} \frac{u}{\mathrm{e}^u} = 0.$$

5. On reconnait le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0 :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1.$$

□

Corollaire II.5

Le graphe de fonction exponentielle a

- une asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$,
- une tangente d'équation $y = 1 + x$ au point $(0;1)$,
- une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

Remarque 4 : Notez que chacune des ces propriétés s'obtient par symétrie par rapport à la droite $y = x$ de la propriété analogue pour le logarithme.

Proposition II.6

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

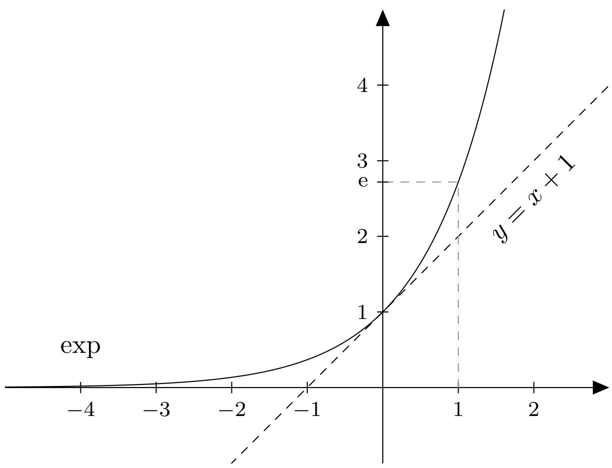
$$e^x \geqslant 1 + x.$$

II.3 Graphe et variations

Le tableau de variation de la fonction exponentielle est donné par le tableau suivant.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
exp	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

Le graphe de la fonction exponentielle est le symétrique de celui de la fonction logarithme par rapport à la droite $y = x$.



III Les fonctions puissances

III.1 Définition et propriétés

On a vu dans le paragraphe précédent, qu'il était possible de définir a^b pour tout $a > 0$ (y compris $a = 1$) et tout $b \in \mathbb{R}$ en posant $a^b = e^{b\ln(a)}$ et que cette définition coïncidait avec celle de la puissance d'un réel par un entier. On va maintenant s'intéresser aux fonctions de types $x \mapsto x^a$ (à ne pas confondre avec l'exponentielle en base a).

Définition III.1

- Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$.
- Soit $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^p = \frac{1}{x^{-p}}$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^a = e^{a\ln(x)}$.

Remarque 5 :

1. Notez que plus la valeur de a est quelconque pour les valeurs de x dans x^a sont restreintes. Lorsque a est entier, on peut définir x^a sur tous les réels mais lorsque $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on ne peut définir x^a que sur les réels strictement positifs.
2. Lorsque $a \in \mathbb{Z}$, les différentes définitions de x^a coïncident pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ (et heureusement !).

Définition III.2

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle **fonction puissance** la fonction définie par

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_a &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^a, \end{aligned} \qquad \text{où} \qquad \mathscr{D}_a = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

Proposition III.3

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f_a : x \mapsto x^a$ est continue et dérivable sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_a$. De plus pour tout $x \in \mathscr{D}_a$,

$$f_a'(x) = ax^{a-1}.$$

Démonstration. On connaît déjà cette formule lorsque $a \in \mathbb{Z}$. Démontrons qu'elle est valide sur $\mathscr{D}_a = \mathbb{R}_+^*$ lorsque $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction puissance f_a est bien continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_a'(x) = \left(\mathrm{e}^{a\ln(x)}\right)' = \frac{a}{x}\,\mathrm{e}^{a\ln(x)} = a\frac{\mathrm{e}^{a\ln(x)}}{\mathrm{e}^{\ln(x)}} = ax^{a-1}.$$

□

Proposition III.4

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $1^a = 1$
2. $x^0 = 1$
3. $(xy)^a = x^a y^a$
4. $\left(\frac{1}{x}\right)^a = \frac{1}{x^a} = x^{-a}$
5. $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} = x^a y^{-a}$
6. $x^a x^b = x^{a+b}$
7. $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
8. $(x^a)^b = x^{ab}$

Remarque 6 : Ce sont exactement les mêmes formules que vous connaissiez déjà lorsque les puissances étaient entières.

Démonstration. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $1^a = \mathrm{e}^{a\ln(1)} = \mathrm{e}^0 = 1$.
2. $x^0 = \mathrm{e}^{0\ln(x)} = 1$.
3. $(xy)^a = \mathrm{e}^{a\ln(xy)} = \mathrm{e}^{a\ln(x)+a\ln(y)} = \mathrm{e}^{a\ln(x)}\,\mathrm{e}^{b\ln(y)} = x^a y^a$.
4. $\left(\frac{1}{x}\right)^a = \mathrm{e}^{a\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}^{-a\ln(x)} = x^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^{a\ln(x)}} = \frac{1}{x^a}$.
5. En utilisant les deux points précédents, $\left(\frac{x}{y}\right)^a = x^a\left(\frac{1}{y}\right)^a = x^a\frac{1}{y^a} = \frac{x^a}{y^a} = x^a y^{-a}$.
6. $x^a x^b = \mathrm{e}^{a\ln(x)}\,\mathrm{e}^{b\ln(x)} = \mathrm{e}^{a\ln(x)+b\ln(x)} = \mathrm{e}^{(a+b)\ln(x)} = x^{a+b}$.
7. En utilisant le point 4 puis le point 6, $\frac{x^a}{x^b} = x^a x^{-b} = x^{a-b}$.
8. $(x^a)^b = \mathrm{e}^{b\ln(x^a)} = \mathrm{e}^{ba\ln(x)} = x^{ab}$.

□

III.2 Limites et prolongement par continuité

Proposition III.5

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto x^a$ la fonction puissance associée.

1. Si $a > 0$,
$$\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^a = 0.$$
2. Si $a < 0$,
$$\lim_{x\to+\infty} x^a = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^a = +\infty.$$

Remarque 7 : Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. La courbe représentative de $x \mapsto x^a$ a pour tangente au point $(1;1)$ la droite d'équation $y = a(x-1)+1$.
2. Si $a < 0$, la courbe représentative de $x \mapsto x^a$ a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et une asymptote verticale $x = 0$ au voisinage de 0.
3. Si $1 > a > 0$, la courbe représentative de $x \mapsto x^a$ a une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.
4. Si $a > 1$, la courbe représentative de $x \mapsto x^a$ a une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

Définition III.6

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ une borne de I telle que $a \notin I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. On dit que f est prolongeable par continuité en 0 si la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et est finie. Notons-là $b = \lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$. On prolonge alors f de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : I \cup \{a\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ b & \text{si } x = a. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors la nouvelle fonction $\tilde{f}$ est continue sur $I \cup \{a\}$.

Remarque 8 : Prolongement en 0.
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est prolongeable par continuité en 0 par la fonction
$$\begin{aligned} \tilde{f}_a : [0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^a & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$
De plus,
   (i) Si $a > 1$, la fonction $\tilde{f}_a$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}_a'(0) = 0$.
   (ii) Si $1 > a > 0$, la fonction $\tilde{f}_a$ n'est pas dérivable en 0 et admet une tangente verticale $x = 0$ en 0.
2. Si $a < 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ n'est pas prolongeable par continuité.

Démonstration. D'après la proposition III.5, quand $a > 0$, x^a a une limite finie valant 0 quand x tend vers 0 et quand $a < 0$, x^a n'a pas de limite finie. Donc pour $a > 0$, f_a est prolongeable par continuité par $\tilde{f}_a(x) = f_a(x)$ si $x > 0$ et $\tilde{f}_a(0) = \lim\limits_{x\to 0} f_a(x) = 0$ et si $a < 0$, f_a n'est pas prolongeable par continuité.
Pour tout $h > 0$, on a
$$\frac{\tilde{f}_a(0+h) - \tilde{f}_a(0)}{h} = \frac{h^a - 0}{h} = h^{a-1}.$$
Si $a > 1$, alors $a - 1 > 0$. Donc
$$\lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}_a(0+h) - \tilde{f}_a(0)}{h} = 0.$$
Donc $\tilde{f}_a$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}_a'(0) = 0$.

Si $1 > a > 0$, alors $a - 1 < 0$, donc
$$\lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}_a(0+h) - \tilde{f}_a(0)}{h} = +\infty.$$
et la fonction $\tilde{f}_a$ n'est dérivable en 0 et admet une tangente verticale $x = 0$ en 0.

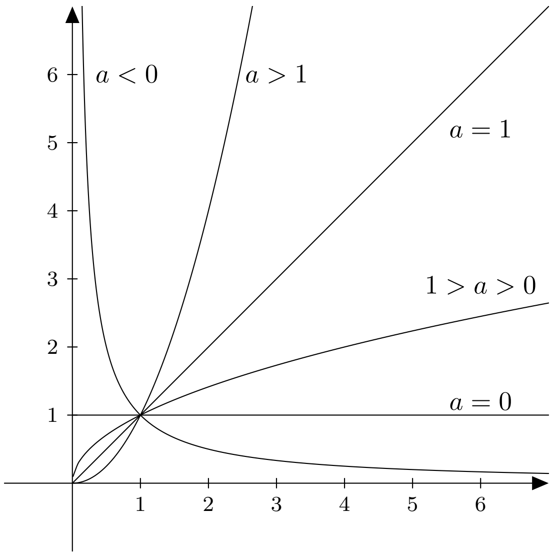
□

III.3 Variations et graphe

Proposition III.7

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Si $a < 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.



III.4 Croissances comparées

Proposition III.8

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty.$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^b \left|\ln(x)\right|^a = 0.$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^b e^{ax} = 0.$

Démonstration. Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Pour tout $x > 0$,
$$\frac{\ln^a(x)}{x^b} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^a = \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}}\right)}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^a = \left(\frac{a}{b} \times \frac{\ln\left(x^{\frac{b}{a}}\right)}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^a.$$
Lorsque $x \to +\infty$, on sait que $x^{\frac{b}{a}} \to +\infty$. Or $\frac{\ln(u)}{u} \underset{u \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc quand $x \to +\infty$, $\frac{\ln\left(x^{\frac{b}{a}}\right)}{x^{\frac{b}{a}}} \to +\infty$ et par suite,
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a}{b} \times \frac{\ln\left(x^{\frac{b}{a}}\right)}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^a = +\infty.$$

2. Avec la même idée,
$$\frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{b}x}}{x}\right)^b = \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{b}x}}{\frac{a}{b}x} \times \frac{a}{b}\right)^b = \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{b}x}}{\frac{a}{b}x}\right)^b \times \left(\frac{a}{b}\right)^b.$$
Quand $x \to +\infty$, $\frac{a}{b}x \to +\infty$. De plus $\frac{\mathrm{e}^u}{u} \to +\infty$ quand $u \to +\infty$. Donc par composition de limites, on obtient que $\frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{b}x}}{\frac{a}{b}x} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{b}x}}{\frac{a}{b}x}\right)^b \times \left(\frac{a}{b}\right)^b = +\infty.$$
3. En posant $u = \frac{1}{x}$,
$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^b\left|\ln(x)\right|^a = \lim_{u\to+\infty} \frac{\left|\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right|^a}{u^b} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\left|\ln(u)\right|^a}{u^b}.$$
Notez que pour u assez grand (et même $u > 1$) on a $\ln(u) > 0$. Donc, d'après le point 1,
$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^b\left|\ln(x)\right|^a = \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln(u)^a}{u^b} = 0.$$
4. De même, en posant $u = -x$,
$$\lim_{x\to-\infty} |x|^b\,\mathrm{e}^{ax} = \lim_{u\to+\infty} |-u|^b\,\mathrm{e}^{-au} = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{au}}{u^b}} = 0.$$

□

Exemple 9 : Déterminer la limite suivante :
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x^2}}.$$

III.5 Les fonctions logarithmes et exponentielles en base a

Définition III.9

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

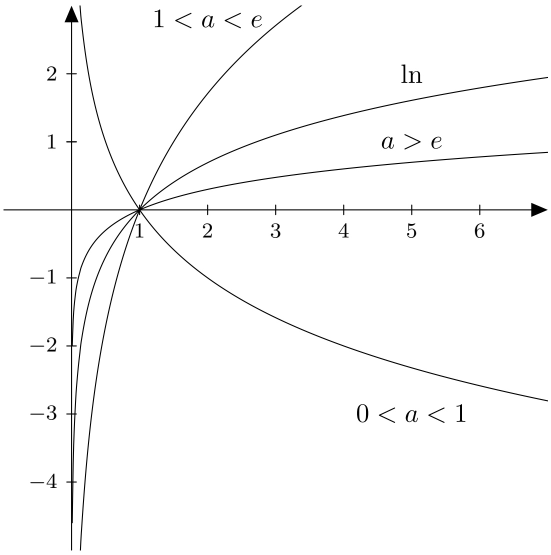
- On appelle **logarithme de base** a, notée $\log_a$, la fonction définie par
$$\begin{aligned}\log_a :\quad &\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ &x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.\end{aligned}$$
- On appelle **exponentielle de base** a, notée $\exp_a$ ou $x \mapsto a^x$, la fonction définie par
$$\begin{aligned}\exp_a :\quad &\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ &x \mapsto \exp_a(x) = a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}.\end{aligned}$$

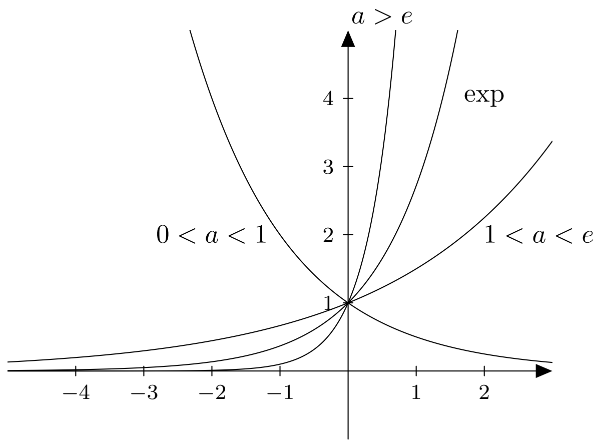
Remarque 10 :

1. Lorsque $a = 10$ on obtient ce que l'on appelle le logarithme décimal, noté simplement log.
2. Lorsque $a = e$, on obtient le logarithme népérien et la fonction exponentielle.
3. On peut définir la fonction $\exp_1$ qui est la fonction constante égale à 1.
4. Les fonctions $\log_a$ et $\exp_a$ sont réciproques l'une de l'autre. En effet pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,
$$y = \log_a(x) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \;\Leftrightarrow\; \ln(a)y = \ln(x) \;\Leftrightarrow\; x = \exp\left(y\ln(a)\right) = \exp_a(y).$$

Exemple 11 : Soit n un entier strictement positif. Montrer que le nombre de chiffre nécessaire pour écrire n en base 10 est égal à la partie entière de $1 + \log(n)$.

Remarque 12 : Soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$. Par construction, on remarque que l'on déduit le graphe de $\log_a$ de celui du logarithme à l'aide d'une dilatation verticale de coefficient $\frac{1}{\ln(a)}$. On déduit le graphe de $\exp_a$ de celui de l'exponentielle par une dilatation horizontale de coefficient $\frac{1}{\ln(a)}$.





IV Les fonctions hyperboliques

Définition IV.1

- On appelle **cosinus hyperbolique**, noté ch, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \mathrm{ch} \,:\, & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

- On appelle **sinus hyperbolique**, noté sh, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \mathrm{sh} \,:\, & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Proposition IV.2

La fonction ch est paire et la fonction sh est impaire.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$$

et

$$\mathrm{sh}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = -\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = -\,\mathrm{sh}(x).$$

□

Proposition IV.3

Les fonctions ch et sh sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).$$

Démonstration. Découle immédiatement du fait que les fonctions hyperboliques sont des sommes de fonctions exponentielles. □

Proposition IV.4

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

1. $\mathrm{e}^x=\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)$,
2. $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$.

Démonstration.

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{2\,\mathrm{e}^x}{2}=\mathrm{e}^x$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)&=\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2\\&=\frac{\mathrm{e}^{2x}+2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}{4}-\frac{\mathrm{e}^{2x}-2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}{4}\\&=\frac{\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{2x}+2-\mathrm{e}^{-2x}}{4}=1.\end{aligned}$$

□

Remarque 13 : Pour retrouver les formules des fonctions hyperboliques, il suffit de remplacer dans leurs analogues pour les fonctions trigonométriques cos par ch et sin par $i\,\mathrm{sh}$. Par exemple :

1. $\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)-i\,\mathrm{sh}(x)i\,\mathrm{sh}(y)=\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$,
2. $i\,\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{ch}(x)i\,\mathrm{sh}(y)+i\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y)\;\Rightarrow\;\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)+\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y)$.

Démonstration.

1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)&=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2}+\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}\\&=\frac{\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{x-y}+\mathrm{e}^{-x+y}+\mathrm{e}^{-x-y}}{4}+\frac{\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^{x-y}-\mathrm{e}^{-x+y}+\mathrm{e}^{-x-y}}{4}\\&=\frac{2\,\mathrm{e}^{x+y}+2\,\mathrm{e}^{-x-y}}{4}\\&=\frac{\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{-x-y}}{2}=\mathrm{ch}(x+y).\end{aligned}$$

2. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)+\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y)&=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}+\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2}\\&=\frac{\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^{x-y}+\mathrm{e}^{-x+y}-\mathrm{e}^{-x-y}}{4}+\frac{\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{x-y}-\mathrm{e}^{-x+y}-\mathrm{e}^{-x-y}}{4}\\&=\frac{2\,\mathrm{e}^{x+y}-2\,\mathrm{e}^{-x-y}}{4}\\&=\frac{\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^{-x-y}}{2}=\mathrm{sh}(x+y).\end{aligned}$$

□

Proposition IV.5

Les fonctions ch et sh vérifient les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x)=+\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}(x)}{x}=+\infty$
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}=\frac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)=+\infty$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}=+\infty$
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}=1$

Démonstration.

1. Puisque $\mathrm{e}^x \to +\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$. Donc $\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
2. De même on sait que $\frac{\mathrm{e}^x}{x} \to +\infty$ et $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$. On en déduit donc que $\frac{\mathrm{ch}(x)}{x} \to \infty$ quand $x \to +\infty$.
3. Remarquons tout d'abord que $\mathrm{ch}(0) = \frac{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-0}}{2} = 1$. Puis par dérivabilité de la fonction ch,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}(0)}{x - 0} = \mathrm{ch}'(0) = \mathrm{sh}(0) = \frac{\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-0}}{2} = 0.$$
De même on peut tout de suite démontrer le point 6 : par dérivabilité de la fonction sh,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(0)}{x - 0} = \mathrm{sh}'(0) = \mathrm{ch}(0) = 1.$$
Or, pour tout $x \neq 0$,
$$\frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} = \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} \times \frac{\mathrm{ch}(x) + 1}{\mathrm{ch}(x) + 1} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - 1}{x^2} \times \frac{1}{\mathrm{ch}(x) + 1} = \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{x^2} \times \frac{1}{\mathrm{ch}(x) + 1} = \left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\right)^2 \times \frac{1}{\mathrm{ch}(x) + 1}.$$
Donc par composition de limites,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} = 1^2 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$
4. Puisque $\mathrm{e}^x \to +\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, on en déduit que $\mathrm{sh}(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
5. Puisque $\frac{\mathrm{e}^x}{x} \to +\infty$ et $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, on en déduit que $\mathrm{sh}(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
6. On l'a vu dans le point 3,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(0)}{x - 0} = \mathrm{sh}'(0) = \mathrm{ch}(0) = 1.$$

□

Remarque 14 : Par parité, on en déduit les limites analogues en $-\infty$.

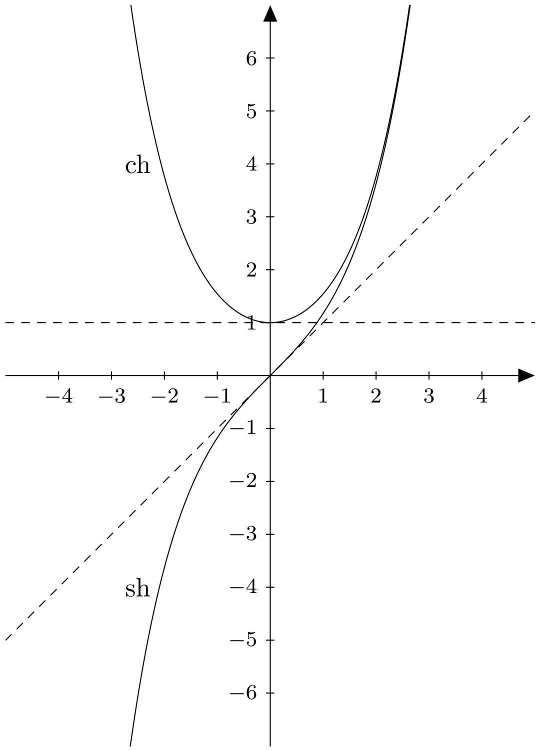
Corollaire IV.6

- Les graphes des fonctions ch et sh ont des branches paraboliques de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.
- La fonction ch a pour tangente la droite horizontale $y = 1$ au point $(0; 1)$.
- La fonction sh a pour tangente la droite $y = x$ au point $(0; 0)$.

IV.1 Variations et graphes

Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction ch l'est également. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$. Donc la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $\mathrm{sh}(0) = 0$. Donc $\mathrm{sh}(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$. Donc la fonction ch est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{ch}(x)$		$+$	1	$+$	
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\text{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
$\text{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



V Les fonctions circulaires réciproques

Les fonctions trigonométriques ou circulaires étant périodiques ne sont pas bijectives sur $\mathbb{R}$. Cependant, il nous intéresse souvent d'inverser ces fonctions, de remonter au(x) antécédent(s). En réduisant l'ensemble de départ, il est possible d'obtenir une bijection, donc une fonction réciproque et par conséquent déterminer un unique antécédent sur cette restriction.

V.1 La fonction arc sinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Donc d'après le théorème de la bijection, la restriction de la fonction sinus à l'ensemble $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ définit une bijection de l'ensemble $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right);\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1;1]$.

Définition V.1

On appelle **arc sinus**, notée arcsin, la fonction réciproque de la restriction de la fonction sinus sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1;1]$,

$$\begin{aligned} \arcsin\ : \quad & [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ & x \mapsto \arcsin(x). \end{aligned}$$

Remarque 15 : Par définition, pour tout $x \in [-1;1]$,

$$\sin(\arcsin(x)) = x$$

et pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\arcsin(\sin(x)) = x.$$

ATTENTION cependant même si pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sin(x) \in [-1;1]$ et que donc il est possible de définir $\arcsin(\sin(x))$ il est absolument faux d'affirmer que $\arcsin(\sin(x)) = x$ pour tout $x \notin \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Par exemple :

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2}.$$

Exemple 16 : Calculer $\arcsin(1)$, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\arcsin(\sin(\pi))$.

Proposition V.2

La fonction arc sinus est strictement croissante sur $[-1;1]$, continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$ et

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Puisque la fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, le théorème de la bijection assure que la fonction arc sinus est continue et strictement croissante sur $[-1;1]$. De plus la fonction sinus est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin'(x) = \cos(x) > 0$ et $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\;\Leftrightarrow x = \sin(y) \in]-1;1[$. Donc la fonction arc sinus est dérivable sur $]-1;1[$ et

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Il nous faut déterminer $\cos(\arcsin(x))$. Pour tout $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2(y) = 1-\sin^2(y)$ et $\cos(y) \geqslant 0$. Donc pour tout $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$. Par conséquent,

$$\forall x \in [-1;1], \qquad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

et donc

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

Proposition V.3

1. La fonction arc sinus est impaire.
2. La fonction arc sinus n'est pas dérivable en -1 et 1 et admet des tangentes verticales $x=-1$ et $x=1$ en ces points.
3. La fonction arc sinus vérifie la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

et a pour tangente la droite $y=x$ au point $(0;0)$.

Démonstration.

1. On commence par remarquer que l'ensemble $[-1;1]$ est bien centré en 0. Soit maintenant $x \in [-1;1]$. Notons $y = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. On a

$$\arcsin(-x) = \arcsin(-\sin(y)) = \arcsin(\sin(-y)).$$

Or, puisque $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, on a $-y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et donc

$$\arcsin(-x) = -y = -\arcsin(x).$$

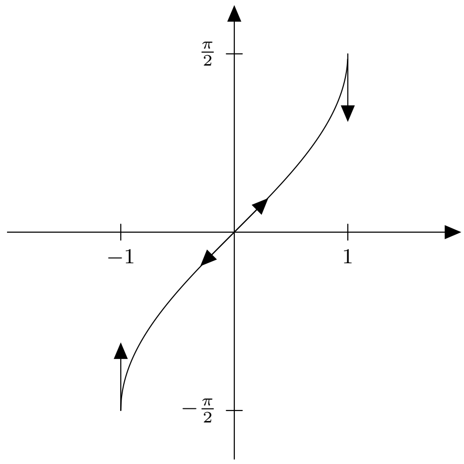
Ceci étant vrai pour n'importe quel $x \in [-1;1]$, on en déduit que la fonction arc sinus est impaire.

2. Si $x \in \left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$, alors $\sin'(x) = \cos(x) = 0$. Donc la fonction arc sinus n'est pas dérivable aux points $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ mais possède des tangentes verticales en ces points.
3. Comme à l'accoutumée, on reconnaît la dérivée de la fonction arc sinus au point 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = \arcsin'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1.$$

□

x	-1	0	1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



V.2 La fonction arc cosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0;\pi]$, donc d'après le théorème de la bijection, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0;\pi]$ définit une bijection de $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$.

Définition V.4

On appelle **arc cosinus**, notée arccos la fonction réciproque à la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0;\pi]$ dans $[-1;1]$:

$$\arccos : \begin{array}{l} [-1;1] \to [0;\pi] \\ x \mapsto \arccos(x). \end{array}$$

Remarque 17 : Comme pour la fonction arc sinus, on a

$$\forall x \in [-1;1], \qquad \cos(\arccos(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [0;\pi], \qquad \arccos(\cos(x)) = x.$$

ATTENTION cependant pour tout $x \notin [0;\pi]$, $\arccos(\cos(x)) \neq x$. Par exemple,

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2}.$$

Exemple 18 : Calculer $\arccos(1)$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Proposition V.5

La fonction arc cosinus est strictement décroissante, continue sur $[-1;1]$, dérivable sur $]-1;1[$ et

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Le théorème de la bijection implique que arc cosinus est strictement décroissante et continue sur $[-1;1]$. La fonction cosinus est dérivable sur $[0;\pi]$ et pour tout $x \in]0;\pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$. Donc la fonction arc cosinus est dérivable sur $]0;\pi[$ et

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))}.$$

Or pour tout $y \in]0;\pi[$, $\sin^2(y) = 1 - \cos^2(y)$ et $\sin(y) > 0$. Donc pour tout $y \in]0;\pi[$, $\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}$. Pour tout $x \in]-1;1[$, $y = \arccos(x) \in]0;\pi[$ et donc $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-y^2}$. Ainsi,

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

Proposition V.6

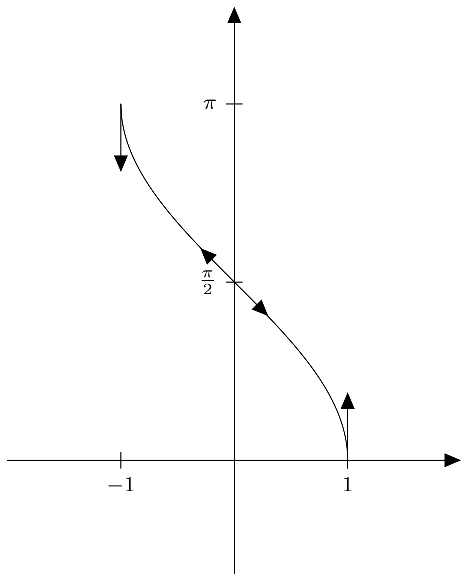
1. Le graphe de la fonction arc cosinus admet le point $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ comme centre de symétrie.
2. La fonction arc cosinus n'est pas dérivable en -1 et 1 et son graphe admet des tangentes verticales $x = -1$ et $x = 1$ en ces points.

Démonstration.

1. Une symétrie centrale est une homothétie de coefficient -1. Donc l'image du point $M(x; y)$ par la symétrie de centre $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ est le point $M'(x', y')$ tel que
$$x' + iy' = -1\left(x + iy - 0 - i\frac{\pi}{2}\right) + 0 + i\frac{\pi}{2} = -x + i(-y + \pi).$$
Donc l'image de $M(x; y)$ est $M'(-x; \pi - y)$. Soient $x \in [-1; 1]$ et $y = \arccos(x) \in [0; \pi]$. On a
$$\arccos(-x) = \arccos(-\cos(y)) = \arccos(\cos(\pi - y)).$$
Or $\pi - y \in [0; \pi]$ donc
$$\arccos(-x) = \pi - y = \pi - \arccos(x).$$
Donc le point $(-x; \arccos(-x)) = (-x; \pi - \arccos(x))$ est bien le symétrique de $(x; \arccos(x))$ par la symétrie centrale de centre $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
2. Si $y = 0$ ou $y = \pi$, on a $\cos'(y) = \sin(y) = 0$. Donc la fonction arc cosinus n'est pas dérivable en $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$ mais admet des tangentes verticales.

□

x	-1	0	1
$\arccos(x)$	π	$\frac{\pi}{2}$	0



V.3 La fonction arc tangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc d'après le théorème de la bijection, la restriction de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition V.7

On appelle **arc tangente**, notée arctan la réciproque de la restriction de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:
$$\arctan : \quad \begin{aligned} \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan(x). \end{aligned}$$

Remarque 19 : Comme pour les fonctions arcsinus ou arccosinus,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \tan(\arctan(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \arctan(\tan(x)) = x.$$

ATTENTION cependant il est faux en général d'affirmer que $\arctan(\tan(x)) = x$ pour n'importe quel réel x. Par exemple,

$$\arctan(\tan(\pi)) = \arctan(0) = 0 \neq \pi.$$

Exemple 20 : Déterminer $\arctan(1)$, $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

Proposition V.8

La fonction arc tangente est strictement croissante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Remarque 21 : La fonction tangente n'admet aucune singularité pour sa dérivée qui est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Sa dérivée est souvent utile dans le calcul d'intégrale et dans la recherche de primitives.

Démonstration. La fonction tangente est strictement croissante et continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc la fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus la fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$. Ainsi la fonction arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Proposition V.9

1. La fonction arc tangente est impaire.
2. La fonction arc tangente vérifie les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

3. Le graphe de la fonction arc tangente admet une asymptote horizontale $y = \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, une asymptote horizontale $y = -\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et d'une tangente d'équation $y = x$ au point $(0;0)$.

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, alors $x = \tan(y)$. On a

$$\arctan(-x) = \arctan(-\tan(y)) = \arctan(\tan(-y)).$$

Or $-y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\arctan(\tan(-y)) = -y = -\arctan(x)$. Ainsi

$$\arctan(-x) = -x$$

et la fonction arc tangente est impaire.

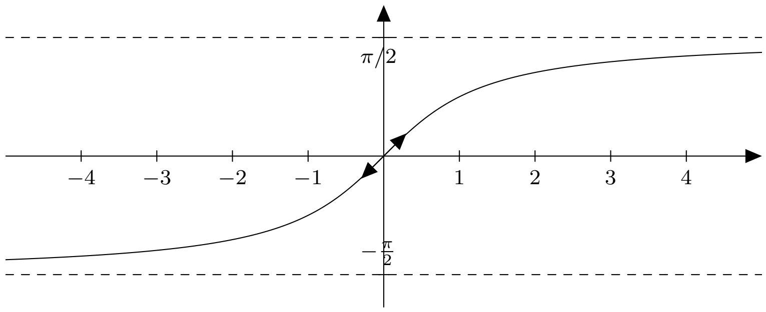
2. Les valeurs aux bornes du domaine de définition de la réciproque sont données par le théorème de la bijection. De plus puisque la fonction arc tangente est dérivable en 0,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1.$$

3. Ce point est la traduction graphique des limites précédentes.

□

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$



V.4 Quelques formules remarquables

Proposition V.10

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ posons $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ (fonction non définie en 0). La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g'(x) = \arctan'(x) + \frac{-1}{x^2}\arctan'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

ATTENTION!!! Cet exercice est un très bel exemple montrant que l'on ne peut intégrer une fonction continue que sur un intervalle! Or l'ensemble $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. La conclusion $\exists C \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^* g(x) = C$ est fausse. Cependant on remarque que $\forall x \in]0;+\infty[, \ g'(x) = 0$ et que $]0;+\infty[$ est un intervalle. Donc

$$\exists C_1 \in \mathbb{R}, \ \forall x \in]0;+\infty[, \ g(x) = C_1.$$

De même en travaillant sur les négatifs, on en déduit que

$$\exists C_2 \in \mathbb{R}, \ \forall x \in]-\infty;0[, \ g(x) = C_2.$$

Cependant il est possible (et ce sera notre cas) que les constantes C_1 et C_2 soient différentes. Pour déterminer C_1 on peut passer à la limite quand $x \to +\infty$ ou $x \to 0$ ou encore prendre $x = 1$,

$$C_1 = g(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

car rappelons que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ donc $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Par imparité,

$$C_1 = g(-1) = -C_1 = -\frac{\pi}{2}.$$

En conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

et nous avons aussi montré le point 6,

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

□

Remarque 22 : On a également les formules suivantes, qui doivent, elles, être redémontrées si vous souhaitez les utiliser :

1. $\forall x \in [-1;1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
2. $\forall x \in [-1;1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
3. $\forall x \in [-1;1]$, $\arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$.
4. $\forall x \in [-1;1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Les trois premiers points ont déjà été démontrés.

4. Posons $f : \begin{array}{l} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arccos(x) + \arcsin(x) \end{array}$. La fonction f est dérivable sur $]-1;1[$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in]-1;1[$,

$$f'(x) = \arccos'(x) + \arcsin'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$, te que pour tout $x \in]-1;1[$ $f(x) = C$. Or $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$. Donc

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Il ne nous reste plus qu'à vérifier que la formule est encore vraie pour $x = -1$ et $x = 1$ et en effet

$$\arccos(-1) + \arcsin(-1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$
$$\arccos(1) + \arcsin(1) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

□

VI Les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$. On définit de façon naturelle les fonctions partie réelle de f, notée $\mathrm{Re}\,(f)$, partie imaginaire de f, notée $\mathrm{Im}\,(f)$, module de f, notée $|f|$ et conjuguée de f, notée $\overline{f}$. Les relations entre ces fonctions sont analogues à celles que l'on a pour les nombres complexes. Par exemple

$$\overline{f} : \quad \begin{array}{l} I \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \overline{f(x)} \end{array}$$

vérifie $\overline{f} = \mathrm{Re}\,(f) - i\mathrm{Im}\,(f)$.

Définition VI.1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$. La fonction f est dite **dérivable** sur I si et seulement si les fonctions réelles $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont dérivables sur I. De plus si f est dérivable sur I, sa dérivée est définie par

$$\forall x \in I, \qquad f'(x) = \mathrm{Re}\,(f)'\,(x) + i\mathrm{Im}\,(f)'\,(x).$$

Remarque 23 : Cela étend bien la dérivabilité des fonctions réelles. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable alors la fonction $\begin{cases} I & \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$ est aussi dérivable sur I.

Exercice 24 : Vérifier que si $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable alors $\overline{f}$ est dérivable sur I.

Proposition VI.2

- La somme, le produit, le quotient de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ dérivables sont dérivables et les formules de dérivation sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (dans le cas d'un quotient, vérifiez que le dénominateur ne s'annule pas).
- Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $g : I \to J$ et $f : J \to \mathbb{C}$. Si g est dérivable sur I et si f est dérivable sur J alors $f \circ g : I \to \mathbb{C}$ est dérivable sur I et $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$.

Proposition VI.3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{C}$. Si φ est dérivable alors la fonction

$$\mathrm{e}^{\varphi} : \quad \begin{array}{l} I \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)} \end{array}$$

est dérivable sur I et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left(\mathrm{e}^{\varphi}\right)'(x) = \varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\varphi(x)}\,.$$

Démonstration. On ne peut pas appliquer la proposition précédente donnant la dérivée d'une fonction composée car la fonction φ est à valeurs complexes (et non dans un intervalle J). Notons que

$$\mathrm{e}^{\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\,\mathrm{e}^{i\mathrm{Im}(\varphi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\cos\left(\mathrm{Im}\left(\varphi\right)\right) + i\,\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\sin\left(\mathrm{Im}\left(\varphi\right)\right).$$

Les fonctions $\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\cos\left(\mathrm{Im}\left(\varphi\right)\right)$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\sin\left(\mathrm{Im}\left(\varphi\right)\right)$ sont dérivables sur I comme composées et produits de fonctions dérivables sur I. Donc e^{φ} est dérivable sur I. De plus, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{e}^{\varphi}\right)'(x) &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\cos\left(\mathrm{Im}\left(\varphi\right)\right)\right)'(x) + i\left(\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi)}\sin\left(\mathrm{Im}\left(\varphi\right)\right)\right)'(x)\\
&= \mathrm{Re}\left(\varphi\right)'(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\cos\left(\mathrm{Im}\left(\varphi(x)\right)\right) - \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\,\mathrm{Im}\left(\varphi\right)'(x)\sin\left(\mathrm{Im}\left(\varphi(x)\right)\right)\\
&\qquad + i\left[\mathrm{Re}\left(\varphi\right)'(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\sin\left(\mathrm{Im}\left(\varphi(x)\right)\right) + \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\,\mathrm{Im}\left(\varphi\right)'(x)\cos\left(\mathrm{Im}\left(\varphi(x)\right)\right)\right]\\
&= \mathrm{Re}\left(\varphi'(x)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\cos\left(\mathrm{Im}\left(\varphi(x)\right)\right) - \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\,\mathrm{Im}\left(\varphi'(x)\right)\sin\left(\mathrm{Im}\left(\varphi(x)\right)\right)\\
&\qquad + i\mathrm{Re}\left(\varphi'(x)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\sin\left(\mathrm{Im}\left(\varphi(x)\right)\right) + i\,\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\,\mathrm{Im}\left(\varphi'(x)\right)\cos\left(\mathrm{Im}\left(\varphi(x)\right)\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\varphi'(x)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\,\mathrm{e}^{i\mathrm{Im}(\varphi(x))} + i\,\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\varphi(x))}\,\mathrm{Im}\left(\varphi'(x)\right)\mathrm{e}^{i\mathrm{Im}(\varphi(x))}\\
&= \varphi'(x)\,\mathrm{e}^{\varphi(x)}.
\end{aligned}$$

□

Exemple 25 : Soit $a \in \mathbb{C}$. Préciser la dérivée de $f : t \mapsto \mathrm{e}^{at}$.

VII Prochainement... Analyse asymptotique - Propriétés des petits o

Proposition VII.1

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = +\infty.$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^b \left|\ln(x)\right|^a = 0.$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^b\,\mathrm{e}^{ax} = 0.$

Exercice 26 : Traduire chacune de ces assertions à l'aide de la notation o.

Proposition VII.2 (Produits)

- *Fonctions :* si $f(x) \underset{x \to a}{=} o\left(g(x)\right)$ alors $f(x)h(x) \underset{x \to a}{=} o\left(g(x)h(x)\right)$.
  Autrement dit $h(x)o\left(g(x)\right) \underset{x \to a}{=} o\left(h(x)g(x)\right)$.
- *Suites :* si $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_n w_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n w_n)$.
  Autrement dit $w_n o\left(v_n\right) \underset{n \to +\infty}{=} o\left(w_n v_n\right)$.

Remarque 27 : Attention, $h\left(x\right) + o\left(g\left(x\right)\right) \neq o\left(h(x) + g(x)\right)$ et de même pour les suites.

Proposition VII.3 (Produits de petits o)

- *Fonctions :* si $f_1(x) \underset{x \to a}{=} o\left(g_1(x)\right)$ et $f_2(x) \underset{x \to a}{=} o\left(g_2(x)\right)$ alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x \to a}{=} o\left(g_1(x)g_2(x)\right)$.
  Autrement dit $o\left(g_1(x)\right)o\left(g_2(x)\right) \underset{x \to a}{=} o\left(g_1(x)g_2(x)\right)$.
- *Suites :* si $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$ et $w_n \underset{n \to +\infty}{=} o(t_n)$ alors $u_n w_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n t_n)$.
  Autrement dit $o\left(v_n\right)o\left(t_n\right) \underset{n \to +\infty}{=} o\left(v_n t_n\right)$.

Proposition VII.4 (Les petits o absorbent les constantes non nulles)

- *Fonctions :* soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, λ NON NULLE, si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $\lambda f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} o(\lambda g(x))$.
  Autrement dit $\lambda\, o(g(x)) \underset{x\to a}{=} o(\lambda g(x)) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$
- *Suites :* soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, λ NON NULLE, si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\lambda v_n)$.
  Autrement dit $\lambda\, o(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\lambda\, v_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Remarque 28 : On a également :

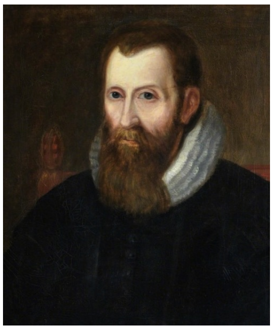
- *Fonctions :* Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0$.
- *Suites :* Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
- *Fonctions :* Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ alors $g(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$.
- *Suites :* Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

Remarque 29 : Voici des manipulations importantes du petit o :

1. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $m \leqslant n$. Si $u \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ alors $u = o(x^m)$.
2. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$, alors $x^m o(x^n) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+m})$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (y compris 0), on a $o(x^n) \underset{x\to 0}{\to} 0$.

Exemple 30 : Simplifier les expressions suivantes :

1. $-2x^5 o\left(\frac{4}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^3\right)$
2. $2\sqrt{x} o(6x\cos(x))\, o(2\,\mathrm{e}^x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^{3/2}\right)$
3. $7o(2^n) + \frac{1}{n} o(o(8n!)) - 32\,\mathrm{e}^{-n}\, o(5^n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$
4. $o\left(\mathrm{e}^{7x} + x^3\right) - o\left(x^3\,\mathrm{e}^{7x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^3\,\mathrm{e}^{7x}\right)$
5. $o(\sin(x))\, o\left(x^4\right) + \left(\mathrm{e}^x + \frac{4}{3+x}\right)^2 o\left(10x^4 + \sqrt{x}\right) \underset{x\to 0}{=} o(\sqrt{x})$
6. $o\left(\ln^4(3n)\right) + o(n)^3 + o(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^3\right)$



NAPIER John *(Merchiston Castle (près d'Edimbourg) 1550 - Merchiston Castle 1617) est un mathématicien et théologien écossais. Il est plus connu sous son nom francisé de NEPER. Il entra à treize ans à l'université de Saint-Andrews où il n'obtint aucun diplôme. Après pluseurs voyages sur le continent il revint dans son Ecosse natale jusqu'à sa mort. Si Neper fut connu à l'époque ce ne fut pas pour ses idées mathématiques mais pour ses positions théologiques et sa fervente défense du protestantisme. Il lui fallut près de vingt ans de réflexion pour que Neper mit au point sa découverte des logarithmes à travers une description cinématique. Il publia sa découverte en 1614 et l'usage des tables des logarithmes eu un vaste écho et fut développé rapidement dans les années qui suivirent la mort de Neper.*
Neper était un personnage tellement singulier et aux idées si originales que certains le croyait déséquilibré et fervent de sciences occultes. Agacé de voir les pigeons de son voisin venir manger les graines dans sa grande propriété, Neper prévint son voisin que s'il ne limitait pas le déplacement des coupables, il s'en emparerait. Le voisin confiant dans l'impossibilité d'attraper ces volatiles lui donna son accord. Il fut très surpris le lendemain de voir les pigeons tituber dans la prairie de Neper et de voir celui-ci les attraper sans peine. Neper avait truffé son terrain de pois imbibés de whisky...
Une autre anecdote raconte que Neper annonça à ses serviteurs qu'un coq noir doué de dons magiques allait identifier le serviteurs coupable de vols répétés. Chaque serviteur devait passer dans une salle obscure et caresser le coq. Neper avait enduit le coq de suie. Craignant d'être reconnu par ce coq magique, le coupable se retint de caresser le coq et fut le seul à sortir les mains propres...

Exponentielle et Logarithme décident de faire une balade en mer. Naturellement, Exponentielle doit régler les frais de location du bateau car comme à son habitude Logarithme ne paye rien.
Au milieu de leur promenade, Exponentielle, à la barre s'endort (le coup de barre si je puis dire). Le logarithme s'écrit alors « Mais fait donc attention, on dérive !
-Oh tu sais, cela ne me change vraiment pas grand chose, répond Exponentielle imperturbable.
-Oui et bien moi c'est l'inverse ! »