Colle du 22/09 - Sujet 1
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1. Etudier $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x-2)}$.

Exercice 2. Soient $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Démontrer l'assertion suivante :

$$\left(\sqrt{a} \notin \mathbb{Q} \text{ OU } \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}\right) \Rightarrow \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}\right).$$

Colle du 22/09 - Sujet 2
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $t \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+t) \leqslant t$.
2. En déduire que pour tout $t \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+t) \geqslant \frac{t}{1+t}$.

Exercice 2. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y.$$

Colle du 22/09 - Sujet 3
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\exists! (g, h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, g paire, h impaire, tel que $f = g + h$.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2^{n+1}$. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de v_n en fonction de n et en déduire u_n.

Exercice 2. Soient $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$. Démontrer qu'il existe une unique droite T qui est à la fois une tangente de f et à la fois une tangente de g.

Colle du 22/09 - Sujet 4
Logique et fonctions réelles

Question de cours. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto ax + b \end{cases}$. Montrer que f est de signe constant si et seulement si $a = 0$.

Exercice 2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $[-1; +\infty[$ par

$$\forall x \in [-1; +\infty[, \qquad f_n(x) = \sqrt{x+1}\, \mathrm{e}^{-nx}\,.$$

1. Soit $n \geqslant 1$. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.
2. Déterminer les extremums de la fonction f_n et préciser s'ils sont locaux ou globaux.
3. Quelles sont les limites de l'abscisse et de l'ordonnée du maximum de f_n lorsque n tend vers l'infini ?
4. Pour tout $n \geqslant 1$ on désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de le fonction f_n. Montrer qu'il existe deux points par lesquels passent toutes les courbes $\mathscr{C}_n$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 0 en fonction de n.
6. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_{n+1}$ par rapport à $\mathscr{C}_n$.