



Colle du 20/10 - Sujet 1
Complexes et calcul algébrique

Question de cours. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

1. Appliquer le changement d'indice $j = 2n + 1 - k$.
2. En déduire S_n .

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left(\frac{z}{z-1}\right)^3 \in \mathbb{R}$.



Colle du 20/10 - Sujet 2
Complexes et calcul algébrique

Question de cours. Énoncer et démontrer la formule sur $\cos(p) + \cos(q)$ à l'aide des complexes.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Calculer en fonction de H_n et n les sommes $\sum_{k=1}^n H_k$ et $\sum_{k=1}^n kH_k$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^n = \bar{z}$.



Colle du 20/10 - Sujet 3
Complexes et calcul algébrique

Question de cours. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire.

Exercice 1. On considère

$$f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

1. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.
2. Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$. Pour tout $z \in P$, donner une expression simple de $|f(z)|$. En déduire $f(P)$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right) \cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}$