Programme de colles 03
Nombres complexes et Calcul algébrique

Quinzaine du 10 au 23 octobre

Nombres complexes

1. Nombres complexes, propriétés élémentaires, partie réelle, imaginaire.
2. Représentation graphique, plan complexe, affixe d'un point, d'un vecteur.
3. Conjugaison, propriétés, interprétation graphique. Caractérisation des réels, des imaginaires purs par la conjugaison.
4. Module d'un complexe, propriétés, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.
5. Module au carré d'une somme, inégalité triangulaire (inférieure et supérieure).
6. Complexes de module 1, stabilité par produit, inverse/conjugué.
7. Définition de l'exponentielle complexe sur les imaginaires purs uniquement, propriétés. Formules d'Euler, formule de Moivre. Les étudiants doivent être capable de factoriser une somme d'exponentielles par l'angle moitié.
8. Argument d'un nombre complexe, forme polaire/trigonométrique, « unicité » de l'écriture. Propriétés de l'argument. Interprétation graphique avec l'angle entre deux vecteurs.

NB : les équations complexes et les racines n-ièmes feront l'objet d'un autre chapitre. L'interprétation graphique des notions de bases doivent être comprises mais nous n'avons pas traité d'exercice de géométrie complexe.

Calcul algébrique

1. Notations $\sum$ et $\prod$ et manipulations.
2. Formule de changement d'indice du type glissement $\tilde{k} = k + r$ ou inversion $\tilde{k} = n - k$.
3. Somme et produit télescopique. Sommation par paquets, somme des pairs/impairs.
4. Sommes usuelles : d'une constante, $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$.
5. Rappels sur les suites arithmétiques et les suites géométriques. Somme d'une suite géométrique.
6. Factorisation de $a^n - b^n$ (formule de Bernoulli).
7. Définition de factorielle n et du coefficient binomial.
8. Formule $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, formule de Pascal, formule du binôme de Newton.
9. Sommes doubles : indexées par un rectangle, par un triangle. Cas des variables séparées.

Questions de cours

1. Démonstration de $|z + z'|^2 = \dots$ et de l'inégalité triangulaire supérieure.
2. Démonstration de $\cos(p) + \cos(q) = \dots$ en passant par les complexes.
3. Démontrer la formule du binôme de Newton.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 \qquad \text{et} \qquad |z+z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Démonstration. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Posons $Z = z + z'$. Alors,

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 = |Z|^2 &= Z\overline{Z} \\ &= (z+z')\,\overline{(z+z')} \\ &= (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) \\ &= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} + |z'|^2. \end{aligned}$$

Posons $\omega = z\overline{z'}$. Alors, $\overline{\omega} = \overline{z}z'$. D'où,

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + \omega + \overline{\omega} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\omega) + |z'|^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2.}$$

D'autre part, on sait que, en posant $u = z\overline{z'}$,

$$\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = \mathrm{Re}\,(u) \leqslant |u| = \left|z\overline{z'}\right| = |z|\left|\overline{z'}\right| = |z|\,|z'|.$$

Donc par ce qui précède,

$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2\,|z|\,|z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2.$$

La fonction carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $|z+z'| \geqslant 0$ et $|z| + |z'| \geqslant 0$, on conclut,

$$\boxed{|z+z'| \leqslant |z| + |z'|.}$$

$\square$

Proposition (démo 2)

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Démonstration. Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\cos(p) + \cos(q) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ip}\right) + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{iq}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ip} + \mathrm{e}^{iq}\right).$$

Or par factorisation par l'angle moitié, on a

$$\mathrm{e}^{ip} + \mathrm{e}^{iq} = \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}} + \mathrm{e}^{i\frac{q-p}{2}}\right) = \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{p-q}{2}}\right).$$

Donc par la formule d'Euler,

$$\mathrm{e}^{ip} + \mathrm{e}^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}.$$

D'où,

$$\cos(p) + \cos(q) = \mathrm{Re}\left(2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\right) \qquad \text{par la } \mathbb{R}\text{-linéarité de la partie réelle.}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).}$$

$\square$

Proposition (démo 3)

Soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ »}.$$

- *Initialisation.* Pour $n=0$, on a $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1 = (a+b)^0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Montrons $\mathscr{P}(n+1) : (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}.$$

Effectuons le changement de variables $\tilde{k} = k+1$ dans la première somme. On obtient alors,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}.\end{aligned}$$

Par la formule de Pascal,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, nous avons démontré $\mathscr{P}(0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ donc par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\square$