Devoir Maison 1
Logique et fonctions réelles

A faire pour le jeudi 22 septembre

Exercice I - Logique et fonction

Partie 1 : Généralités

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère alors les prédicats suivants :

$A(f,g)$: « Les graphes de f et g sont confondus. »
$B(f,g)$: « Les graphes de f et g se coupent en au moins un point. »
$C(f,g)$: « Au voisinage de $+\infty$ les graphes de f et g ne se coupent pas. »
$D(f,g)$: « Si les graphes de f et de g se coupent au moins deux fois alors les graphes sont confondus. »

Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle de la forme $[A;+\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

1. Ecrire en langage mathématique chacune des assertions.
2. Enoncer (en langage mathématique toujours) la négation de chacune des assertions précédentes.
3. Enoncer la réciproque et la contraposée de $D(f,g)$.

Soient $T_1 : y = a_1x + b_1$ et $T_2 : y = a_2x + b_2$ deux droites non verticales du plan.

4. Démontrer proprement l'équivalence suivante :

$$A(T_1,T_2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} .$$

5. Montrer que $D(T_1,T_2)$ est vraie.

Partie 2 : Etude d'une fonction

On considère h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x(1 - \ln(2x)) . \end{array}$$

6. Déterminer le domaine de définition de h.
7. Etudier la parité de h.
8. Déterminer proprement les limites aux bornes du domaine de définition.
9. Déterminer le tableau de variation complet de h. *On pourra dériver la dérivée...*
10. Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de h.
11. Même question pour la fonction $H : x \mapsto \frac{h(x)}{x}$.
12. La fonction h est-elle minorée ? majorée ? bornée ?
13. La fonction h admet-elle un minimum ? un maximum ? Si oui le(s) préciser.

14. La fonction $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?

15. Montrer que h définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble que l'on précisera.

    On note φ sa fonction réciproque.

16. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(y) = \frac{1}{2\,\varphi(y) - 2\ln\left(2\,\varphi(y)\right)}.$$

Partie 3 : Tangente commune

On s'intéresse à la question de l'existence d'une tangente commune à deux courbes. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + m \end{array}$$

On note Γ_m la courbe représentative de f_m, pour $\beta \in \mathbb{R}$, on note $\Delta_{m,\beta}$ la tangente à Γ_m au point d'abscisse $x = \beta$. On note également $\Gamma_{\exp}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, δ_α la tangente à $\Gamma_{\exp}$ au point d'abscisse $x = \alpha$.
On fixe $m \in \mathbb{R}$.

17. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Justifier l'existence des tangentes $\Delta_{m,\beta}$ et δ_α et calculer leurs équations.

18. Montrer qu'il existe une même droite tangente à la fois à $\Gamma_{\exp}$ et à la fois à Γ_m si et seulement si

$$\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \qquad \begin{cases} \alpha = \ln(2\beta) \\ m = \beta^2 + 2\beta\left(1 - \ln(2\beta)\right) \end{cases}.$$

19. En déduire que $\Gamma_{\exp}$ et Γ_m ont une tangente commune si et seulement si $m > 0$.

20. Déterminer en justifiant la valeur de vérité des assertions suivantes :

$$\begin{aligned}
E &: \text{« } \exists m \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ A\left(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha\right) \text{ »} \\
F &: \text{« } \forall m \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ A\left(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha\right) \text{ »} \\
G &: \text{« } \exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall m \in \mathbb{R}_+^*,\ A\left(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha\right) \text{ »} \\
H &: \text{« } \exists m \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ A\left(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha\right) \text{ »} \\
I &: \text{« } \forall\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \exists m \in \mathbb{R}_+^*,\ A\left(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha\right) \text{ »} \\
J &: \text{« } \forall m \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ A\left(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha\right) \text{ »}
\end{aligned}$$