Correction du Devoir Maison 1
Logique et fonctions réelles

Du jeudi 22 septembre

Exercice I - Logique et fonction

Partie 1 : Généralités

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère alors les prédicats suivants :

$A(f,g)$: « Les graphes de f et g sont confondus. »
$B(f,g)$: « Les graphes de f et g se coupent en au moins un point. »
$C(f,g)$: « Au voisinage de $+\infty$ les graphes de f et g ne se coupent pas. »
$D(f,g)$: « Si les graphes de f et de g se coupent au moins deux fois alors les graphes sont confondus. »

Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle de la forme $[A;+\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

1. Les graphes de deux fonctions sont complètement confondus si et seulement si les deux fonctions sont égales :
$$\boxed{A(f,g) \quad \Leftrightarrow \quad f = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x).}$$
Les deux graphes se coupent :
$$\boxed{B(f,g) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x).}$$
Pour le voisinage de l'infini, on écrit
$$\boxed{C(f,g) \quad \Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in [A;+\infty[,\ f(x) \neq g(x).}$$
Enfin, on a
$$\boxed{D(f,g) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\left(\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y,\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(y) = g(y) \end{cases}\right) \Rightarrow (\forall u \in \mathbb{R},\ f(u) = g(u))\right].}$$

2. On obtient les négations suivantes :
$$\boxed{\begin{array}{lcl} \overline{A(f,g)} & \Leftrightarrow & f \neq g \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq g(x) \\ \overline{B(f,g)} & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq g(x) \\ \overline{C(f,g)} & \Leftrightarrow & \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in [A;+\infty[,\ f(x) = g(x). \end{array}}$$
Puis,
$$\overline{D(f,g)} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\left(\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y,\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(y) = g(y) \end{cases}\right) \text{ ET } (\exists u \in \mathbb{R},\ f(u) \neq g(u))\right].$$
ce qui peut aussi s'écrire :
$$\boxed{\overline{D(f,g)} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \neq y,\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(y) = g(y) \\ f(z) \neq g(z) \end{cases}.}$$

3. La réciproque de $D(f,g)$ est

$$\boxed{(\forall u\in\mathbb{R},\ f(u)=g(u))\ \Rightarrow\ \left(\exists\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq y,\ \begin{cases}f(x)=g(x)\\ f(y)=g(y)\end{cases}\right).}$$

La contraposée est donnée par

$$\boxed{(\exists u\in\mathbb{R},\ f(u)\neq g(u))\ \Rightarrow\ \left[\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq y,\ (f(x)\neq g(x)\ \text{ OU }\ f(y)\neq g(y))\right].}$$

Soient $T_1 : y=a_1x+b_1$ et $T_2 : y=a_2x+b_2$ deux droites non verticales du plan.

4. Procédons par double implication. Supposons $A(T_1,T_2)$ vraie. Alors,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad T_1(x)=T_2(x)\qquad\Leftrightarrow\qquad \forall x\in\mathbb{R},\quad a_1x+b_1=a_2x+b_2.$$

En particulier, pour $x=0$, alors, $0+b_1=0+b_2\ \Leftrightarrow\ b_1=b_2$. Dès lors, pour $x=1$, on obtient aussi,

$$a_1+b_1=a_2+b_2.$$

Comme $b_1=b_2$, on a donc $a_1+b_1=a_2+b_1$ i.e. $a_1=a_2$. On a donc bien

$$A(T_1,T_2)\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases}a_1=a_2\\ b_1=b_2\end{cases}.$$

Réciproquement, supposons $\begin{cases}a_1=a_2\\ b_1=b_2\end{cases}$. Alors directement pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$a_1x+b_1\underset{a_1=a_2}{=}a_2x+b_1\underset{b_1=b_2}{=}a_2x+b_2.$$

Ceci étant vrai pour $x\in\mathbb{R}$ quelconque, on en déduit que

$$\begin{cases}a_1=a_2\\ b_1=b_2\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad A(T_1,T_2)$$

Conclusion,

$$\boxed{A(T_1,T_2)\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}a_1=a_2\\ b_1=b_2\end{cases}.}$$

5. Montrons $D(T_1,T_2)$. Supposons qu'il existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x\neq y$ tels que $T_1(x)=a_1x+b_1=T_2(x)=a_2x+b_2$ et $T_1(y)=a_1y+b_1=T_2(y)=a_2y+b_2$. Alors,

$$\begin{cases}a_1x+b_1=a_2x+b_2\\ a_1y+b_1=a_2y+b_2\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases}a_1x+b_1=a_2x+b_2\\ a_1(y-x)=a_2(y-x)\end{cases}\quad L_2\leftarrow L_2-L_1$$

Or $x\neq y$ donc $y-x\neq 0$. Donc

$$\begin{cases}a_1x+b_1=a_2x+b_2\\ a_1=a_2\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases}a_1x+b_1=a_1x+b_2\\ a_1=a_2\end{cases}\quad\begin{cases}b_1=b_2\\ a_1=a_2\end{cases}.$$

Donc par la question précédente, $A(T_1,T_2)$ est vraie :

$$\forall u\in\mathbb{R},\quad T_1(u)=T_2(u).$$

Conclusion,

$$\boxed{D(T_1,T_2)\text{ est vraie.}}$$

Partie 2 : Etude d'une fonction

On considère h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x\left(1 - \ln\left(2x\right)\right). \end{array}$$

6. Notons $\mathscr{D}_h$ le domaine de définition de h. On a les équivalences suivantes :

$$x \in \mathscr{D}_h \quad \Leftrightarrow \quad h(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*.}$$

7. La blague. Puisque $\mathscr{D}_h$ n'est pas un ensemble centré en 0, on en déduit directement que

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

8. Soit $x > 0$. On a

$$h(x) = x^2 + 2x\left(1 - \ln\left(2x\right)\right) = x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(2)}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}\right).$$

Or on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln(2)}{x} = 0$ et par croissance comparée, on a aussi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(2)}{x} - \frac{2\ln(x)}{x} = 1.$$

Conclusion, par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.}$$

D'un autre côté, pour tout $x > 0$,

$$h(x) = x^2 + 2x - 2x\ln(2) - 2x\ln(x).$$

Or par croissance comparée, $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longleftarrow} 0$. Donc par somme,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = 0.}$$

9. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et composée de fonctions qui le sont et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad h'(x) = 2x + 2\left(1 - \ln\left(2x\right)\right) + 2x\left(-\frac{1}{x}\right) = 2x + 2 - 2\ln\left(2x\right) - 2 = 2x - 2\ln\left(2x\right).$$

Etudions les variations de la fonction h'. Posons $h_1 = h'$. La fonction h_1 est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$h_1'(x) = 2 - 2\frac{1}{x} = 2\frac{x-1}{x}.$$

Or pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h_1'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $h_1'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$. Enfin, on a $h_1(1) = 2 - 2\ln(2) = 2\left(1 - \ln(2)\right)$. On obtient donc le tableau de variation suivant de h_1 :

x	0		1		$+\infty$
$h_1'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h_1		$\searrow$	$2\left(1-\ln(2)\right)$	$\nearrow$	

On observe donc que $2\left(1-\ln(2)\right)$ est un minimum de h_1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad h_1(x) \geqslant 2\left(1-\ln(2)\right).$$

Or $1-\ln(2)>0 \iff 1>\ln(2) \iff \mathrm{e}>2$ qui est vrai. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad h_1(x)>0.$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, à l'aide de la question précédente, on en conclut le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
h	0	$\nearrow$	$+\infty$

10. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{h(x)}{x} = x + 2\left(1-\ln(2x)\right) = x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{\ln(2)}{x}-\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Par croissance comparée, $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par somme,

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x}-\frac{\ln(2)}{x}-\frac{\ln(x)}{x} = 1.$$

Donc par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } h \text{ admet une branche parabolique de direction } (Oy) \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

11. Par ce qui précède,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad H(x) = x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{\ln(2)}{x}-\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Par la question précédente, $H(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{H(x)}{x} = \frac{h(x)}{x^2} = 1+\frac{2}{x}-\frac{\ln(2)}{x}-\frac{\ln(x)}{x}.$$

Donc de même que précédemment,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{H(x)}{x} = 1.$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$H(x) - x = x\left(\frac{2}{x} - \frac{\ln(2)}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 2 - \ln(2) - \ln(x).$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} H(x) - x = -\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Le graphe de } H \text{ admet une branche parabolique de direction } y = x \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

12. D'après ses variations (question 9.) on observe que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) > 0$. Donc 0 est un minorant de h :

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est minorée.}}$$

Cependant, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{h \text{ n'est pas majorée et donc n'est pas bornée non plus a fortiori.}}$$

13. Puisque la fonction h n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$, la minorant 0 n'est jamais atteint donc

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ n'a pas de minimum.}}$$

Puisque la fonction h n'a pas de majorant, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ n'a pas de maximum.}}$$

14. Par la question 9. la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par le théorème de la bijection, la fonction h définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $h\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ et de plus,

$$h\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \left]\lim_{0^+} h; \lim_{+\infty} h\right[=]0; +\infty[\,.$$

Donc tout réel dans l'ensemble image $h\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}_+^*$ admet un unique antécédent et tout réel de l'ensemble $\mathbb{R}_-$ n'admet aucun antécédent. Globalement tout réel de $\mathbb{R}$ admet un ou aucun antécédent (et jamais deux ou plus). Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \text{ est injective.}}$$

Par ce qui précède, on note aussi que tout réel négatif ou nul n'admet aucun antécédent par h. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \text{ n'est pas surjective.}}$$

15. Puisque la fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, par $\boxed{\text{le théorème de la bijection}}$, h définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\boxed{h\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}_+^*}$

On note φ sa fonction réciproque.

16. On a déjà vu dans les questions précédentes que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad h'(x) = 2x - 2\ln(2x) \geqslant h'(1) > 0$$

Donc sur $I = \mathbb{R}_+^*$, on a

- h est dérivable sur I,

- h est strictement croissante sur I,
- $\forall x \in I,\ h'(x) \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, on en déduit que φ est dérivable sur $J = h(I) = \mathbb{R}_+^*$ et de plus,

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(y) = \frac{1}{h'(\varphi(y))} = \frac{1}{2\,\varphi(y) - 2\ln(2\,\varphi(y))}.$$

Conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ et

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(y) = \frac{1}{2\,\varphi(y) - 2\ln(2\,\varphi(y))}.}$$

Partie 3 : Tangente commune

On s'intéresse à la question de l'existence d'une tangente commune à deux courbes. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + m \end{array}$$

On note Γ_m la courbe représentative de f_m, pour $\beta \in \mathbb{R}$, on note $\Delta_{m,\beta}$ la tangente à Γ_m au point d'abscisse $x = \beta$. On note également $\Gamma_{\exp}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, δ_α la tangente à $\Gamma_{\exp}$ au point d'abscisse $x = \alpha$.
On fixe $m \in \mathbb{R}$.

17. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable en α et donc δ_α existe. De même, f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et donc en β et donc $\Delta_{m,\beta}$ existe. Conclusion,

$$\boxed{\text{pour tout } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \delta_\alpha \text{ et } \Delta_{m,\beta} \text{ existent.}}$$

De plus, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\delta_\alpha : \qquad y = \exp'(\alpha)(x - \alpha) + \exp(\alpha) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \mathrm{e}^\alpha (x - \alpha) + \mathrm{e}^\alpha = \mathrm{e}^\alpha (x - \alpha + 1).$$

De même, pour $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_{m,\beta} : \qquad y = f_m'(\beta)(x - \beta) + f_m(\beta) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 2\beta(x - \beta) + \beta^2 + m = 2x\beta - \beta^2 + m.$$

Conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{rl} \delta_\alpha : & y = \mathrm{e}^\alpha (x - \alpha + 1). \\ \Delta_{m,\beta} : & y = 2x\beta - \beta^2 + m. \end{array}}$$

18. Il existe une même droite tangente commune à $\Gamma_{\exp}$ et à Γ_m si et seulement si

$$\begin{aligned} \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^\alpha (x - \alpha + 1) = 2x\beta - \beta^2 + m \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^\alpha x + \mathrm{e}^\alpha (1 - \alpha) = 2x\beta - \beta^2 + m. \end{aligned}$$

Par la question 4. avec $a_1 = \mathrm{e}^\alpha$, $b_1 = \mathrm{e}^\alpha (1 - \alpha)$, $a_2 = 2\beta$, $b_2 = m - \beta^2$,

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \mathrm{e}^\alpha = 2\beta \\ \mathrm{e}^\alpha (1 - \alpha) = m - \beta^2 \end{cases}.$$

Premier cas, si $\beta \leqslant 0$, alors $\mathrm{e}^{\alpha} = 2\beta$ est impossible, donc

$$\exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\qquad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} \qquad\Leftrightarrow\qquad \exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\qquad \begin{cases}\mathrm{e}^{\alpha} = 2\beta\\ \mathrm{e}^{\alpha}(1-\alpha) = m-\beta^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\qquad \begin{cases}\alpha = \ln(2\beta)\\ \mathrm{e}^{\alpha}(1-\alpha) = m-\beta^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\qquad \begin{cases}\alpha = \ln(2\beta)\\ 2\beta(1-\ln(2\beta)) = m-\beta^2.\end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\qquad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} \qquad\Leftrightarrow\qquad \exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\qquad \begin{cases}\alpha = \ln(2\beta)\\ m = 2\beta(1-\ln(2\beta))+\beta^2.\end{cases}}$$

19. Par la question précédente et la partie 2 on a

$$\exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\qquad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} \qquad\Leftrightarrow\qquad \exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\qquad \begin{cases}\alpha = \ln(2\beta)\\ m = h(\beta).\end{cases}$$

Or que $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ est bijective donc tout réel $m \in \mathbb{R}_+^*$ admet un et un seul antécédent par h. Donc si $m > 0$,

$$\exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\qquad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} \qquad\Leftrightarrow\qquad \exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\qquad \begin{cases}\alpha = \ln(2\beta)\\ \beta = \varphi(m).\end{cases}$$

Si $m > 0$, alors on peut trouver un réel strictement positif $\beta = \varphi(m) > 0$ et un réel $\alpha = \ln(2\beta)$ et donc les deux courbes admettent un tangente commune. Au contraire si $m \leqslant 0$, alors m n'admet aucun antécédent par h : $m = h(\beta)$ n'admet aucune solution. Conclusion,

$$\boxed{\exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\qquad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} \qquad\Leftrightarrow\qquad m > 0.}$$

20. Par la question précédente, l'assertion $\boxed{E \text{ est vraie}}$ en effet pour $m = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ par exemple, alors en prenant $\beta = \varphi(1)$ et $\alpha = \ln(2\beta)$, on a bien $A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha)$.

Mieux, l'assertion $\boxed{F \text{ est vraie}}$, pour tout $m \in \mathbb{R}_+^*$, on peut trouver $\beta = \varphi(m)$ et $\alpha = \ln(\beta)$ tel que $A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha)$ soit vraie.

L'assertion $\boxed{G \text{ est fausse}}$. Procédons par l'absurde, supposons G vraie :

$$\exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall m\in\mathbb{R}_+^*,\ A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha)$$

Alors de même qu'à la question précédente, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \mathrm{e}^{\alpha}x + \mathrm{e}^{\alpha}(1-\alpha) = 2x\beta - \beta^2 + m \qquad\Leftrightarrow\qquad \begin{cases}\mathrm{e}^{\alpha} = 2\beta\\ \mathrm{e}^{\alpha}(1-\alpha) = m-\beta^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \begin{cases}\beta > 0\\ \alpha = \ln(2\beta)\\ m = \beta^2 + 2\beta(1-\ln(2\beta))\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \begin{cases}\beta > 0\\ \alpha = \ln(2\beta)\\ m = h(\beta)\end{cases}$$

Donc notamment, on a
$$\exists\beta > 0,\ \forall m \in \mathbb{R}_+^*, m = h(\beta).$$

Autrement dit il existe un réel β tel que son image (qui est unique aussi) décrit $\mathbb{R}_+^*$ tout entier. Impossible, on ne peut pas avoir $h(\beta) = 1$ et $h(\beta) = 2$.

L'assertion $\boxed{H \text{ est fausse}}$. En effet, de même que précédemment, si on fixe $m \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\beta = \varphi(m)$ est aussi fixé et donc l'assertion $A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha)$ ne peut pas être vraie pour tout β *(on pouvait aussi signaler que cela ne pouvait pas fonction pour tout β car β doit être strictement positif).*

L'assertion $\boxed{I \text{ est fausse}}$ car l'assertion $e^\alpha = 2\beta$ ne fonctionne pas pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Si on fixe β, alors $\alpha = \ln(2\beta)$ ne peut prendre qu'une seule valeur et réciproquement.

Puisque l'assertion H est fausse, a fortiori $\boxed{J \text{ est fausse}}$ aussi.