Devoir Maison 2
Fonctions réelles, trigonométrie, complexes

A faire pour le jeudi 13 octobre

Exercice I - Trigonométrie

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, (E) $\qquad \sin(3x) + \sin(x) = 0$.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $\sin(3x)$.
   (b) En déduire les solutions de (E).
2. Retrouver le résultat de la question précédente par factorisation.
3. A l'aide de (E), résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (F) : $\frac{\sin(3x)}{\tan(x)} + \cos(x) = 0$.

Exercice II - Fonction réelle

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction $h : x \mapsto \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}$. Pour ce faire, on considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Partie 1 : Tracé de f

1. Déterminer I le domaine de définition de f.
2. Calculer lorsque c'est possible la dérivée de f.
3. Déterminer le tableau de variations complet de la fonction f.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
5. Déterminer l'équation de la tangente de f en 0.
6. Tracer le graphe de la fonction f. *On fera apparaître les éventuelles asymptotes et tangentes précédemment établies.*

Partie 2 : Etude de f^{-1}

7. Justifier que f définit une bijection de I dans J où J est un ensemble que l'on précisera. On note encore f sa restriction de I dans J.
8. Sans calcul, comment obtient-on le graphe de f^{-1} à partir de celui de f ? Le tracer sur le même graphique qu'à la question 6. *On fera aussi apparaître ses éventuelles tangentes et asymptotes.*
9. On note $I' = I \setminus \{-1\}$. Soit $x \in I'$. On pose $u = 1 + x$ et $v = 1 - x$.
   (a) Exprimer $\frac{u}{v}$ en fonction de $f(x)$ et simplifier $u + v$.
   (b) En déduire une expression de $\frac{1}{v}$ uniquement en fonction de $f(x)$.
   (c) Déterminer une expression de $f'(x)$ en fonction de u et de v.
   (d) En déduire que $f'(x) = \frac{\left(f(x)^2+1\right)^2}{4f(x)}$.

10. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
11. Sans calculer f^{-1}, déterminer pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(f^{-1}\right)'(y)$.
12. En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(y) = \frac{a}{y^2+1} + b$, avec a et b deux constantes que l'on précisera.
13. Retrouver le résultat précédent par une autre méthode.
14. Calculer l'équation de la tangente de f^{-1} en 1 et $\lim\limits_{y\to+\infty} f^{-1}(y)$ et vérifier la cohérence de votre résultat avec la question 8.

Partie 3 : Etude de h

Soit $\mathcal{D}$ le domaine de définition de h.

15. Sans calculer $\mathcal{D}$, exprimer h en fonction de f sur $\mathcal{D}$.
16. En déduire $\mathcal{D}$ puis justifier que l'on peut restreindre le domaine d'étude à $\left]-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
17. Montrer que pour tout $t \in \left]-\pi; \pi\right[$, on a $h\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = h\left(-\frac{\pi}{2} + t\right)$.
18. En déduire que le graphe de h présente une symétrie axiale que l'on précisera.
19. Justifier que h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.
20. Déterminer le tableau de variation de h sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ puis en déduire celui sur $\left]-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Partie 4 : Un peu de trigonométrie

21. Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$. *On pourra penser à « la forme conjuguée ».*
22. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant \sqrt{3}$.
23. Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation $h(x) = \sqrt{3}$.
24. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant f^{-1} et le résultat de la question 12. ou 13.
25. Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = \frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}$. *On pourra bien sûr exploiter les formules de l'angle moitié.*

Exercice III - Une fonction complexe

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \frac{1}{\overline{z}+i} \end{array}$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f.

1. Déterminer $\mathcal{D}$ et justifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.
2. (a) Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^*)$.
   (b) Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$.
   (c) Représenter $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^*)$ et $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$ dans le plan.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donner la forme algébrique de $f(ix)$.
   (b) En déduire que $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) \subseteq i\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   (c) Montrer également que $i\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.
   (d) Conclusion ? Donner une représentation graphique de $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.
4. (a) Montrer que f est injective sur $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que f est surjective sur $\mathbb{C}^*$.
   (c) Que peut-on en déduire ?