Correction du Devoir Maison 2
Fonctions réelles, trigonométrie, complexes

Du jeudi 13 octobre

Exercice I - Trigonométrie

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(E) \qquad \sin(3x) + \sin(x) = 0.$$

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x)\\ &= 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right)\\ &= 4\cos^2(x)\sin(x) - \sin(x)\\ &= 4\left(1 - \sin^2(x)\right)\sin(x) - \sin(x)\\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).}$$

On vérifie son résultat pour $x = \pi/2$ par exemple.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. A l'aide de la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(E) : \quad \sin(3x) + \sin(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3\sin(x) - 4\sin^3(x) + \sin(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad 4\sin(x) - 4\sin^3(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad 4\sin(x)\left(1 - \sin^2(x)\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad 4\sin(x)\cos^2(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \sin(x) = 0 \ \text{ OU } \ \cos(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 0 + k\pi \ \text{ OU } \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 0 + k\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} = \left\{ k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

On vérifie que les solutions obtenues fonctionnent bien.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on observe que

$$\sin(3x) + \sin(x) = 2\sin\left(\frac{3x + x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x - x}{2}\right) = 2\sin(2x)\cos(x).$$

Ainsi, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(E) : \quad \sin(3x) + \sin(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sin(2x)\cos(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \sin(2x) = 0 \ \text{ OU } \ \cos(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x = 0 + k\pi \ \text{ OU } \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 0 + k\frac{\pi}{2} \ \text{ OU } \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le même ensemble solution,

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} = \left\{ k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence naturellement par l'ensemble de définition de l'équation (F). On a

$$(F)\, existe \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \tan(x) \text{ existe} \\ \tan(x) \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Fixons donc $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (F) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(3x)}{\tan(x)} + \cos(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin(3x) + \tan(x)\cos(x) = 0 \qquad \text{car } x \not\equiv 0\ [\pi] \text{ et donc } \tan(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin(3x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cos(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin(3x) + \sin(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (E)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de (F) sont celles de (E) qui appartiennent à $\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$... Il n'y en a donc aucune ! Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \emptyset.}$$

Exercice II - Fonction réelle

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction $h : x \mapsto \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}$. Pour ce faire, on considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Partie 1 : Tracé de f

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$x \in I \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \geqslant 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \geqslant 0 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Or, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Conclusion,

$$\boxed{I = [-1; 1[\,.}$$

2. Soit $x \in I$. Puisque la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0, on a par ce qui précède,

$$\begin{cases} \frac{1+x}{1-x} > 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \left]-1;1\right[.$$

La fonction f est donc dérivable sur $]-1;1[$, de plus pour tout $x \in]-1;1[$,

$$f'(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}}$$
$$= \frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}}.}$$

3. Soit $x \in]-1;1[$. Alors, $1-x > 0$ et $1+x > 0$. Donc $f'(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $]-1;1[$ et par continuité de f en -1, f est aussi strictement croissante sur $[-1;1[$. De plus,

$$f(-1) = \sqrt{\frac{1-1}{1+1}} = 0.$$

D'autre part, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{1}{1-x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} 1+x = 2$. Donc par quotient, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{1+x}{1-x} = +\infty$ puis par composée avec la fonction racine carrée,

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = +\infty.$$

Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant :

x	-1		1
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||

4. On a les égalités suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-0}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}.$$

Or $1+x \underset{\substack{x\to -1 \\ x>-1}}{\longrightarrow} 0^+$ et $1-x \underset{\substack{x\to -1 \\ x>-1}}{\longrightarrow} 2$. Donc

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = +\infty.$$

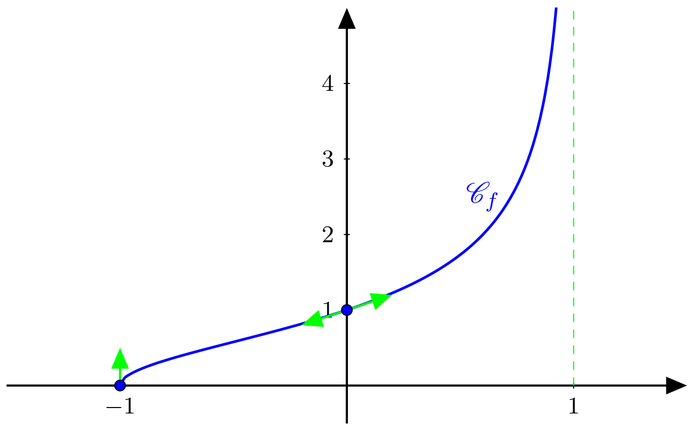
Cela confirme que la fonction f n'est pas dérivable en -1. Plus précisément,

$$\boxed{\text{la graphe de } f \text{ admet une demi-tangente verticale en } x=-1.}$$

5. Puisque la fonction f est dérivable en 0, l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ de f en 0 est donnée par $y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$. Donc par la question 2., $y = 1 \times x + 1 = x + 1$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{T}_0 : \qquad y = x + 1.}$$

6. Des questions précédentes, on en déduit le graphe suivant :



Partie 2 : Etude de f^{-1}

7. Par ce qui précède, on a

   - f est continue sur I,
   - f est strictement croissante sur I,

   donc par le théorème de la bijection, f définit une bijection de I dans $J = f\,(I)$. De plus, J est de la même forme que I :

$$J = f\,(I) = \left[f\,(-1)\,; \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) \right[= [0; +\infty[= \mathbb{R}_+.$$

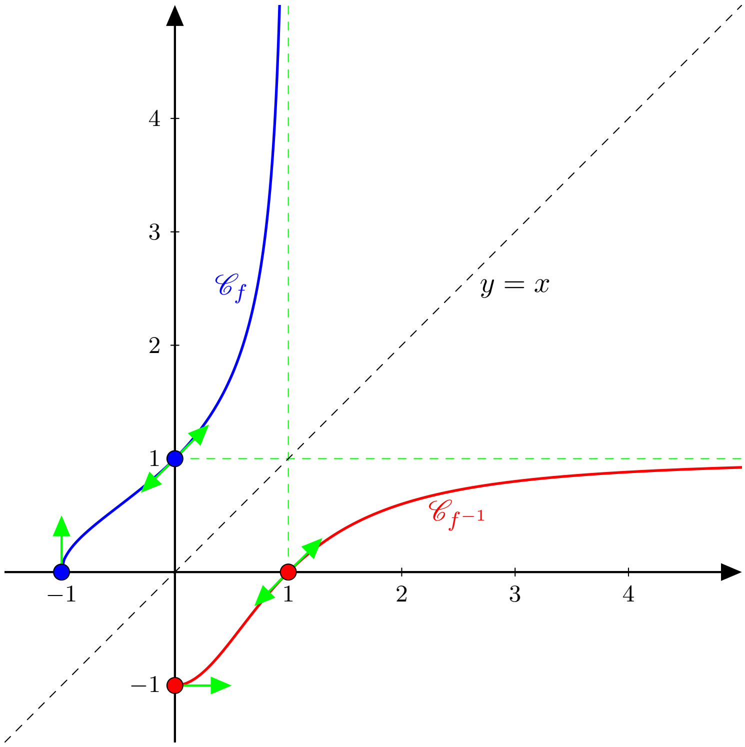
   Conclusion,

$$\boxed{\text{la restriction de } f \text{ de } I = [-1;1[\text{ dans } J = \mathbb{R}_+ \text{ est une bijection.}}$$

8. D'après le cours, on sait que l'on obtient le graphe de f^{-1} à partir de celui de f par

$$\boxed{\text{une symétrie d'axe } y = x.}$$

   On obtient donc



9. On note $I' = I \setminus \{-1\}$. Soit $x \in I'$. On pose $u = 1 + x$ et $v = 1 - x$.

(a) On a les égalités entre réels suivantes :

$$\frac{u}{v} = \frac{1+x}{1-x} = f(x)^2 \qquad \text{et} \qquad u + v = 1 + x + 1 - x = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{u}{v} = f(x)^2 \text{ et } u + v = 2.}$$

(b) Puisque $u + v = 2$ et que $x \neq 1$, on a $v \neq 0$. Donc en divisant par v, on obtient que

$$\frac{u}{v} + 1 = \frac{2}{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x)^2 + 1 = \frac{2}{v}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{v} = \frac{f(x)^2 + 1}{2}.}$$

(c) Par la question 2. on a directement

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}} = \frac{1}{v^{3/2}\sqrt{u}}.}$$

(d) Par les questions précédentes, on observe que

$$f'(x) = \frac{1}{v^{3/2}\sqrt{u}} = \frac{1}{v^{3/2}v^{1/2}\sqrt{\frac{u}{v}}} = \frac{1}{v^2\sqrt{f(x)^2}} = \left(\frac{1}{v}\right)^2 \frac{1}{f(x)}, \qquad \text{car } f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \geqslant 0.$$

Donc par la question 9.b

$$f'(x) = \left(\frac{f(x)^2 + 1}{2}\right)^2 \frac{1}{f(x)} = \frac{\left(f(x)^2 + 1\right)^2}{4f(x)}.$$

Conclusion, on trouve bien que pour $x \in I'$,

$$\boxed{f'(x) = \frac{\left(f(x)^2+1\right)^2}{4f(x)}.}$$

10. Par la question 2. on sait que f est dérivable sur I' et pour tout $x \in I'$, $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}} \neq 0$. Donc
    - f est dérivable sur I',
    - f est strictement croissante sur I' (d'après ce qui précède)
    - pour tout $x \in I'$, $f'(x) \neq 0$.

    Donc d'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I') =]\lim_{x\to -1} f(x)\,; \lim_{x\to 1} f(x)[= \mathbb{R}_+^*$. Conclusion,

$$\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

11. Toujours par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, on sait également que

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Or d'après la question 9. on a pour tout $u \in I'$, $f'(u) = \frac{\left(f(u)^2+1\right)^2}{4f(u)}$. Or pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $u = f^{-1}(y) \in \mathbb{R}_+^*$, donc

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\frac{\left(f(f^{-1}(y))^2+1\right)^2}{4f(f^{-1}(y))}} = \frac{1}{\frac{(y^2+1)^2}{4y}} = \frac{4y}{(y^2+1)^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{4y}{(y^2+1)^2}.}$$

12. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{a}{y^2+1} \end{array}$. On observe que g est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,

$$g'(y) = -\frac{2ay}{(y^2+1)^2}.$$

Donc par la question précédente, on observe que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(y) = -\frac{a}{2}\left(f^{-1}\right)'(y)$, en particulier, en prenant $a = -2$, on a pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(y) = \left(f^{-1}\right)'(y)$. Donc $y \mapsto \frac{-2}{y^2+1}$ est une primitive de $\left(f^{-1}\right)'$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent,

$$\exists b \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{-1}(y) = \frac{-2}{y^2+1} + b.$$

Puisque $f(0) = \sqrt{\frac{1+0}{1-0}} = 1$, on en déduit que $f^{-1}(1) = 0$. Dès lors,

$$0 = f^{-1}(1) = \frac{-2}{1+1} + b = -1 + b \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 1.$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{-1}(y) = \frac{-2}{y^2+1} + 1$. Attention le résultat parle de $\mathbb{R}_+$, il nous reste à vérifier qu'en 0 la formule marche encore. On a $f(-1) = 0$ donc $f^{-1}(0) = -1$. D'autre part, pour $y = 0$, $\frac{-2}{y^2+1} + 1 = -2 + 1 = -1$. Donc la formule reste vraie pour $y = 0$. Conclusion, avec $\boxed{a = -2}$ et $\boxed{b = 1}$, on obtient bien

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+, \qquad f^{-1}(y) = \frac{-2}{y^2+1} + 1 = \frac{y^2-1}{y^2+1}.}$$

13. Soit $(x, y) \in [-1;1[\times \mathbb{R}_+$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad &\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{1+x}{1-x} && \text{car } \begin{cases} y \geqslant 0 \\ \frac{1+x}{1-x} \geqslant 0 \text{ pour } x \in [-1;1[\end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad y^2 (1-x) = 1+x && \text{car } x \neq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad y^2 - 1 = x\left(1+y^2\right) && \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{y^2-1}{y^2+1} && \text{car } 1+y^2 \geqslant 1 > 0.
\end{aligned}$$

Vérifions que $\frac{y^2-1}{y^2+1} \in [-1;1[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
-1 \leqslant \frac{y^2-1}{y^2+1} < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -y^2-1 \leqslant y^2-1 < y^2+1 \qquad \text{car } y^2+1>0 \\
&\Leftrightarrow \quad -y^2 \leqslant y^2 \text{ toujours vraie } \text{ ET } -1 < 1 \text{ toujours vraie }.
\end{aligned}$$

Donc $\frac{y^2-1}{y^2+1} \in [-1;1[$. Au final, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on a bien une et une seule solution $x \in [-1;1[$ vérifiant $y = f(x)$. Donc tout réel positif y admet un et un seul antécédent dans $[-1;1[$ donné par $x = \frac{y^2-1}{y^2+1}$. Conclusion, on retrouve bien que f est bijective et

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+, \qquad f^{-1}(y) = \frac{y^2-1}{y^2+1}.}$$

14. On a déjà vu que la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc notamment en 1 donc l'équation de la tangente de f^{-1} en 1 est donnée par

$$\mathcal{T}' : y = \left(f^{-1}\right)'(1)\,(x-1) + f^{-1}(1).$$

Par les question précédentes :

$$\mathcal{T}' : y = \frac{4}{\left(1^2+1\right)^2}(x-1) + \frac{1^2-1}{1^2+1} = x-1.$$

L'équation de la tangente de f^{-1} en 1 vaut

$$\boxed{\mathcal{T}' : y = x-1.}$$

Cela correspond bien à ce que l'on a dessiné en question 8.

D'autre part,

$$\lim_{y \to +\infty} f^{-1}(y) = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2-1}{y^2+1} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1-\frac{1}{y^2}}{1+\frac{1}{y^2}} = 1.$$

On observe alors que le graphe de f^{-1} présente $\boxed{\text{une asymptote horizontale d'équation } y = 1 \text{ en } +\infty.}$ C'est bien ce que nous avions dessiné. Ce que l'on est fort tout de même !

Partie 3 : Etude de h

Soit $\mathcal{D}$ le domaine de définition de h.

15. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on observe directement que

$$\boxed{h(x) = \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}} = f\left(\sin(x)\right).}$$

16. La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$. Donc pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} h(x) \text{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad f(\sin(x)) \text{ existe} \\ &\Leftrightarrow \quad -1 \leqslant \sin(x) < 1 \qquad \text{d'après la question 1.} \\ &\Leftrightarrow \quad \sin(x) \neq 1 \qquad \text{car } \sin(x) \in [-1;1] \\ &\Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

On observe que l'ensemble $\mathcal{D}$ est invariant par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$. De plus, la fonction sinus étant 2π-périodique, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$h(x + 2\pi) = f(\sin(x + 2\pi)) = f(\sin(x)) = h(x).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

On peut donc réduire son domaine d'étude à un ensemble inclus dans $\mathcal{D}$ de longueur 2π par exemple

$$\left]-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cap \mathcal{D} = \left]-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{on peut réduire le domaine d'étude de } h \text{ à } \left]-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.}$$

17. Soit $t \in]-\pi;\pi[$. Alors, on a $\pi > -t > -\pi$, donc $\frac{\pi}{2} > -\frac{\pi}{2} - t > -\frac{3\pi}{2}$ et donc on a bien $-\frac{\pi}{2} - t \in \mathcal{D}$. De plus,

$$h\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = f\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right) = f(-\cos(t)).$$

De même, on a $-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + t < \frac{\pi}{2}$, donc $-\frac{\pi}{2} + t \in \mathcal{D}$ et

$$h\left(-\frac{\pi}{2} + t\right) = f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2} + t\right)\right) = f(-\cos(t)).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in]-\pi;\pi[, \qquad h\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = h\left(-\frac{\pi}{2} + t\right).}$$

18. Par la question précédente, les points d'abscisse $x = -\frac{\pi}{2} - t$ et $x = -\frac{\pi}{2} + t$ ont la même ordonnée $y = h\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = h\left(-\frac{\pi}{2} + t\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } h \text{ présente une symétrie axiale d'axe verticale } x = -\frac{\pi}{2}.}$$

19. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(x) \in]-1;1[= I'$ et f est dérivable sur I'. Donc par composée, on en déduit que $h = f \circ \sin$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. De plus,

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad h'(x) = \sin'(x) f'(\sin(x)) = \cos(x) \frac{1}{(1 - \sin(x))^{3/2} \sqrt{1 + \sin(x)}}.$$

Conclusion, $\boxed{h \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[}$ et

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad h'(x) = \frac{\cos(x)}{(1 - \sin(x))^{3/2} \sqrt{1 + \sin(x)}}.}$$

20. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On a $-1 < \sin(x) < 1$. Donc $1-\sin(x) > 0$ et $1+\sin(x) > 0$. De plus, $\cos(x) > 0$. Donc par quotient,
$$h'(x) = \frac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^{3/2}\sqrt{1+\sin(x)}} > 0.$$
La fonction h est donc strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Or h est définie et même continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc par continuité, h est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. En outre, par la question 3.
$$h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = f(-1) = 0.$$
D'autre part, en posant $u = \sin(x) \underset{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}}{\longrightarrow} 1^-$, on a, toujours par la question 3.
$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} h(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(\sin(x)) = \lim_{\substack{u \to 1 \\ u < 1}} f(u) = +\infty.$$
Conclusion, le tableau de variation de h est

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
h	0	$\nearrow$	$+\infty$

Par la symétrie axiale, d'axe $x = -\frac{\pi}{2}$, on obtient directement,

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Partie 4 : Un peu de trigonométrie

21. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On a
$$h(x) = \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}.$$
Or puisque $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(x) \in]-1;1[$, en particulier, $1+\sin(x) > 1-1 = 0$. Donc
$$h(x) = \sqrt{\frac{(1+\sin(x))^2}{(1-\sin(x))(1+\sin(x))}} = \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} \qquad \text{car } 1+\sin(x) > 0$$
$$= \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{\cos^2(x)}}.$$
Or $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(x) > 0$. Ainsi, $\sqrt{\cos^2(x)} = \cos(x)$. Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad h(x) = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}.}$$

22. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'inéquation a un sens si et seulement si $\cos(x) \neq 0$ ou encore $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Fixons donc $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Premier cas, $x \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$. Dans ce cas, $\cos(x) > 0$ et on a

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant \sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + \sin(x) \geqslant \sqrt{3}\cos(x) \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \geqslant \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \geqslant \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{3} + 2n\pi \leqslant x + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{6} + 2n\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2n\pi.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, les solutions sont

$$\mathscr{S}_1 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[.$$

Second cas, $x \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$ et donc $\cos(x) < 0$. Dès lors, on obtient de façon similaire

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant \sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + \sin(x) \leqslant \sqrt{3}\cos(x) \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \leqslant \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leqslant \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{3} + 2n\pi \leqslant x + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{3} + 2n\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2n\pi.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, il n'y a aucune solution, $\mathscr{S}_2 = \emptyset$. Conclusion, globalement l'ensemble solution est donc

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[.}$$

23. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$. Par la question 21. on a

$$h(x) = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)} = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sin(x) = \sqrt{3}\cos(x) \qquad \text{car } \cos(x) \neq 0$$

Donc comme dans la question précédente, par la forme polaire, on a

$$h(x) = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right).$$

Puisque $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $x + \frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right[$ et donc

$$h(x) = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}.$$

Conclusion, on a

$$\boxed{h(x) = \sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{\pi}{6}.}$$

24. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, alors $\sin(x) \in]-1;1[$. On a par ce qui précède,

$$h(x) = \sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad f\left(\sin(x)\right) = \sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x) = f^{-1}\left(\sqrt{3}\right).$$

Or par la question 12. ou 13. pour tout $y \geqslant 0$, $f^{-1}(y) = \frac{y^2-1}{y^2+1}$, donc

$$h(x) = \sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x) = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{\pi}{6} \qquad\qquad \text{car } x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.$$

Conclusion, on retrouver bien (c'est drôlement beau les maths)

$$\boxed{h(x) = \sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{\pi}{6}.}$$

25. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Par définition,

$$h(x) = \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}.$$

Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, ce qui est possible car $\frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$. Alors on obtient que

$$\sin(x) = \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Puisque $\frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$, on a $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ et donc

$$\sin(x) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}} = \sqrt{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2-2t}} \qquad\qquad \text{car } 1+t^2 > 0 \\ &= \sqrt{\frac{(1+t)^2}{(1-t^2)}} = \frac{|1+t|}{|1-t|}. \end{aligned}$$

Or puisque $\frac{x}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$, alors $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \in]-1;1[$. Donc $1+t > 0$ et $1-t > 0$. Ainsi, on obtient bien que

$$\boxed{\forall \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \qquad h(x) = \frac{1+t}{1-t} = \frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}.}$$

Exercice III - Une fonction complexe

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \frac{1}{\overline{z}+i}, \end{array}$ où $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$z \in \mathcal{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{z}+i \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{z} \neq -i \qquad \Leftrightarrow \qquad z \neq i.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{i\}.}$$

On observe alors bien que pour tout $z \in \mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a $\frac{1}{\overline{z}+i} \neq 0$ et donc

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, \qquad f(z) \in \mathbb{C}^*.}$$

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{array}{lll} f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^*) & \Leftrightarrow & f(z) \in \mathbb{R}^* \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\overline{z}+i} \in \mathbb{R}^* \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\overline{z}+i} = \overline{\left(\dfrac{1}{\overline{z}+i}\right)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\overline{z}+i} = \dfrac{1}{z-i} \\ & \Leftrightarrow & \overline{z}+i = z-i \qquad \text{car } z \neq i \\ & \Leftrightarrow & z - \overline{z} = 2i \\ & \Leftrightarrow & 2i\mathrm{Im}\,(z) = 2i \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Im}\,(z) = 1. \end{array}$$

Attention à bien ôter i de l'ensemble final. On obtient donc la droite horizontale suivante privée d'un point :

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^*) = \{\, a+i \mid a \in \mathbb{R}^* \,\}.}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lllll} z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) & \Leftrightarrow & f(z) \in \mathbb{U} & \Leftrightarrow & f(z)\,\overline{f(z)} = 1 \\ & & & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\overline{z}+i} \times \dfrac{1}{z-i} = 1 \\ & & & \Leftrightarrow & (\overline{z}+i)(z-i) = 1 \qquad \text{car } z \neq i \\ & & & \Leftrightarrow & |z|^2 - i\overline{z} + iz + 1 = 1 \\ & & & \Leftrightarrow & |z|^2 + i(z - \overline{z}) = 0 \\ & & & \Leftrightarrow & |z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 0. \end{array}$$

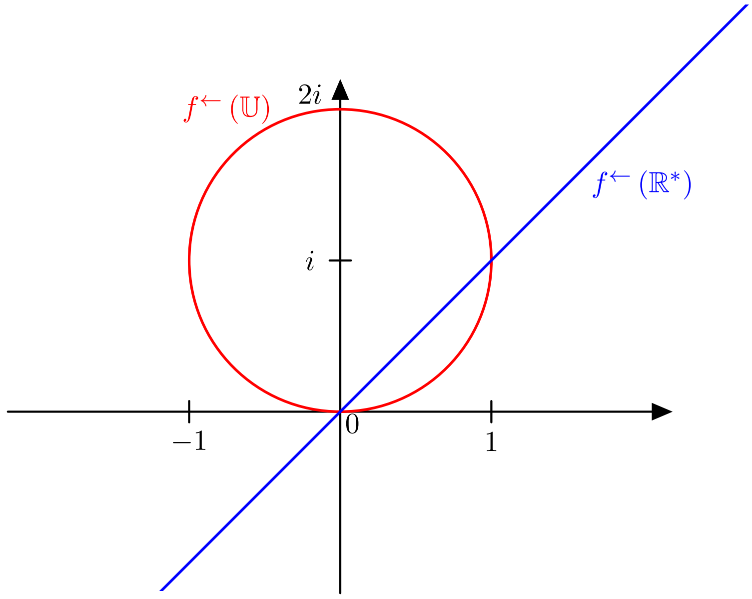
Posons $z = a + ib$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{array}{lllll} z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) & \Leftrightarrow & a^2 + b^2 - 2b = 0 & \Leftrightarrow & a^2 + (b-1)^2 - 1 = 0 \\ & & & \Leftrightarrow & a^2 + (b-1)^2 = 1. \end{array}$$

On note que i n'est pas solution de cette dernière équation (c'est le centre du cercle). On en déduit que l'ensemble solution est le cercle de centre i et de rayon 1. Conclusion :

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = 1 \,\}.}$$

(c) On obtient :



3. (a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors $ix \neq i$ et donc $ix \in \mathcal{D}$. De plus, on a les égalités suivantes :

$$f(ix) = \frac{1}{\overline{ix} + i} = \frac{1}{-ix + i} = \frac{1}{i(1-x)} = \frac{-i}{1-x} = \frac{i}{x-1}.$$

Conclusion, on a

$$\boxed{f(ix) = \frac{i}{x-1}.}$$

(b) Soit $z' \in f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$. Par définition, il existe $z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}$ tel que $z' = f(z)$. De plus puisque $z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}$, il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $z = ix$. Donc, d'après la question précédente,

$$z' = f(z) = f(ix) = \frac{i}{x-1}.$$

Or $\frac{1}{x-1} \in \mathbb{R}^*$, donc $z' \in i\mathbb{R}i \setminus \{0\}$. Ceci étant vrai pour tout $z' \in f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$, on conclut que

$$\boxed{f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) \subseteq i\mathbb{R} \setminus \{0\}.}$$

(c) Soit $z' \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}^*$ tel que $z' = iy$. Posons $x = \frac{1+y}{y}$ qui est bien défini car $y \neq 0$ puis $z = ix$. Montrons que $x \neq 1$. Procédons par l'absurde. Supposons que $x = 1$. Alors $\frac{1+y}{y} = 1$ i.e. $1 + y = y$ ou encore $1 = 0$ ce qui est impossible. Donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On note alors par la question (a) que

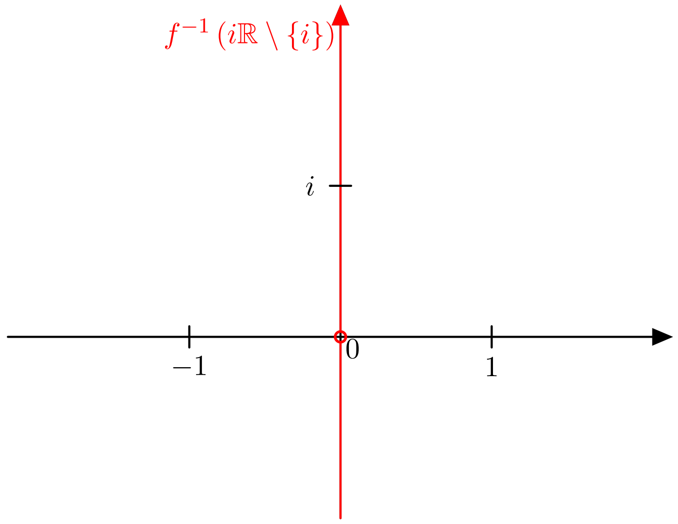
$$f(z) = f(ix) = \frac{i}{x-1} = \frac{i}{\frac{1+y}{y} - 1} = \frac{iy}{1 + y - y} = iy = z'.$$

Donc $z' = f(z)$ avec $z = ix$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donc $z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}$ et par suite, $z' \in f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$. Ceci étant vrai pour tout $z' \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on conclut que

$$\boxed{i\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}).}$$

(d) Par les questions (b) et (c), on a montré une double inclusion et donc on conclut que

$$\boxed{f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) = i\mathbb{R} \setminus \{0\}}.$$



4. (a) Soient $(z,z') \in \mathcal{D}^2 = (\mathbb{C}\setminus\{i\})^2$ tel que $f(z) = f(z')$. Alors, on a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{z}+i} = \frac{1}{\overline{z'}+i} \quad &\Rightarrow \quad \overline{z}+i = \overline{z'}+i \\ &\Rightarrow \quad \overline{z} = \overline{z'} \\ &\Rightarrow \quad z = z'. \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ est injective sur } \mathcal{D}}$.

(b) Soit $z' \in \mathbb{C}^*$. Montrons que z' est l'image d'un complexe par f. On procède par analyse-synthèse.
Analyse. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$ tel que $z' = f(z)$. On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} z' = f(z) \quad &\Rightarrow \quad z' = \frac{1}{\overline{z}+i} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{z'} = \overline{z}+i \qquad \text{car } z' \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad \overline{z} = \frac{1}{z'} - i \\ &\Rightarrow \quad \overline{z} = \frac{1-iz'}{z'} \\ &\Rightarrow \quad z = \frac{1+i\overline{z'}}{\overline{z'}}. \end{aligned}$$

On aurait donc un candidat solution à notre problème.
Synthèse. On pose $z = \frac{1+i\overline{z'}}{\overline{z'}}$ qui est bien défini car $z' \neq 0$. De plus $z \neq i$. En effet par l'absurde, si $z = i$ alors $1 + i\overline{z'} = i\overline{z'}$ et donc $1 = 0$ ce qui est absurde. Donc $z \in \mathcal{D}$. De plus on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{\overline{z}+i} = \frac{1}{\left(\overline{\frac{1+i\overline{z'}}{\overline{z'}}}\right)+i} = \frac{1}{\frac{1-iz'}{z'}+i} &= \frac{z'}{1-iz'+iz'} \qquad \text{car } z' \neq 0 \\ &= z'. \end{aligned}$$

En posant un tel z, on a donc déterminer un antécédent de $z' \in \mathscr{D}_f$ par f. Donc $z' \in f(\mathbb{C}\setminus\{i\})$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on conclut que $\boxed{f \text{ est surjective sur } \mathbb{C}^*}$.

(c) Par les questions précédentes, f est injective sur $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ et surjective sur $\mathbb{C}^*$.

$\boxed{\text{Conclusion, } f \text{ définit une bijection de } \mathbb{C} \setminus \{i\} \text{ dans } \mathbb{C}^*.}$

Mieux ! Par la question précédente, on a même f^{-1} *:* $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ z' & \mapsto & \frac{1+i\overline{z'}}{\overline{z'}} \end{array}$ *, trop classe !*