Devoir Maison 3
Calcul algébrique, Fonctions usuelles, Equations complexes

A faire pour le jeudi 17 novembre

Exercice I - Calcul algébrique

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

1. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j}$.
2. Soit $k \in [\![0;n]\!]$, montrer que $\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\frac{1}{n+1}$.
3. A l'aide d'un glissement d'indice, en déduire la valeur de S_n.
4. En déduire $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n-k+1}$.

Exercice II - Fonctions usuelles

On considère la fonction suivante :
$$\mathrm{th} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}. \end{array}$$

On pose ensuite
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(\mathrm{sh}(x)) + \arccos(\mathrm{th}(x)). \end{array}$$

L'objectif est de montrer que f est une fonction constante.

Partie 1 : Etude de la fonction tangente hyperbolique

1. Justifier que th est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathrm{th}(0)$ et $\mathrm{th}(\ln(2))$.
3. Préciser la parité de th.
4. Calculer th' en fonction de th uniquement.
5. Déterminer une seconde expression de th' en fonction de ch uniquement.
6. Préciser le comportement asymptotique de la courbe de th au voisinage de $+\infty$.
7. Préciser le tableau de variations complet de th.
8. Déterminer l'équation de la tangente à th au point d'abscisse $x = 0$.
9. Tracer la courbe représentative de la fonction th.

10. Montrer que th définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble J que l'on précisera. On note $\text{argth} = \text{th}^{-1}$ sa fonction réciproque.

11. Justifier que argth est dérivable sur J et montrer que $\forall x \in J$, $\text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

12. En déduire une expression de argth sur J.
On pourra découper $\frac{1}{(1-x)(1+x)}$ *en deux fractions plus simples.*

13. Retrouver le résultat précédent en résolvant l'équation $y = \text{th}(x)$.

14. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \text{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \text{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)$.

15. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)$.

Partie 2 : Etude de f, méthode 1

16. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

17. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

18. Calculer $f(0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

19. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

20. En déduire la valeur f sur $\mathbb{R}$.

Partie 3 : Etude de f, méthode 2

21. (a) Soit $x \in]-1;1[$. A l'aide du graphe de la fonction arccos, intuiter la valeur de $\frac{\arccos(-x)+\arccos(x)}{2}$.
    (b) Démontrer la formule précédente.
    (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \pi - f(x)$.

On fixe dans la suite $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $a = \text{sh}(x)$, $u = \arctan(a)$, $b = \text{th}(x)$ et $v = \arccos(b)$.

22. Préciser à quel(s) intervalle(s) appartiennent u et v.

23. Redémontrer la valeur de $\sin(\arccos(b))$ en fonction de b.

24. Simplifier $\cos^2(\arctan(a))$ en fonction de a.

25. En déduire $\cos(\arctan(a))$.

26. De même simplifier $\sin(\arctan(a))$ en fonction de a.

27. Déduire des questions précédentes la valeur de $\cos(f(x))$.

28. En déduire la valeur de f sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice III - Complexes

Les trois parties sont indépendantes.

Partie 1 : Une équation de degré 3

On considère l'équation suivante

$$(E) \ : \qquad z^3 + (1+i)\,z^2 + (2-2i)\,z + 8i = 0.$$

1. Déterminer l'ensemble des complexes imaginaires purs solutions de (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) et placer les solutions dans le plan complexe.

Partie 2 : Un soupçon de géométrie

On pose A le point d'affixe $1-i$ et B celui d'affixe $-2-2i$.

3. Montrer que $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et en déduire la nature du triangle AOB.
4. Calculer OA, OB et BA et retrouver le résultat de la question précédente.
5. On pose A' l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que O, A et A' sont alignés. Est-ce cohérent avec les questions précédentes ?

Partie 3 : Des racines n-ièmes (quand même)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(F)\ :\qquad \left(1+i\sqrt{3}\right) z^n + \left(-1+i\sqrt{3}\right) z^{2n} - 2z^{3n} - \left(1+i\sqrt{3}\right) z^{4n} + \left(1-i\sqrt{3}\right) z^{5n} = -2.$$

6. Rappeler les solutions de $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$.
7. Ecrire chacune des solutions sous forme algébrique.
8. En déduire les solutions de (F_0) : $\left(1+i\sqrt{3}\right) z+\left(-1+i\sqrt{3}\right) z^2-2z^3-\left(1+i\sqrt{3}\right) z^4+\left(1-i\sqrt{3}\right) z^5=-2$ sous forme polaire.
9. En déduire les solutions de (F).

Exercice IV - Complexes

On étend la définition de la fonction ch sur $\mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \mathrm{ch}(z) = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, calculer $\mathrm{ch}\,(-z)$, $\mathrm{ch}\,(z+2i\pi)$ et $\mathrm{ch}\,(z+i\pi)$ en fonction de $\mathrm{ch}(z)$.
2. Pour tout $b \in \mathbb{R}$, reconnaître $\mathrm{ch}\,(ib)$.
3. Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\mathrm{ch}(z)} = \mathrm{ch}\,(\overline{z})$.
4. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{ch}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b) = \frac{\mathrm{ch}(a+b)+\mathrm{ch}(a-b)}{2}$.
5. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a+ib$. Déduire des trois questions précédentes que $|\mathrm{ch}\,(z)|^2 = \frac{\mathrm{ch}(2a)+\cos(2b)}{2}$.
6. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{ch}(z) = 0$. On pose $X = \mathrm{e}^z$.
   (a) Déterminer les valeurs possibles de X.
   (b) En déduire les solutions de $\mathrm{ch}\,(z) = 0$.
7. Procéder de même pour déterminer les solutions de $\mathrm{ch}(z) = 1$.
8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, simplifier $\mathrm{ch}\,(a+ik\pi)$.
9. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a+ib$. Montrer que $\mathrm{Re}\,(\mathrm{ch}(z)) = \mathrm{ch}(a)\cos(b)$ et déterminer de même $\mathrm{Im}\,(\mathrm{ch}(z))$.
10. Déterminer l'ensemble $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{ch}(z) \in \mathbb{R}$ et vérifier la cohérence avec les questions 2. et 8.