Correction du Devoir Maison 3
Calcul algébrique, Fonctions usuelles, Equations complexes

Du jeudi 17 novembre

Exercice I - Calcul algébrique

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

1. On reconnaît une somme double triangulaire. On inverse l'ordre de sommation :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} 2^i \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} 2^i \binom{n}{j} \\
&= \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^i \binom{n}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} 2^i \binom{n}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j} 2^i.
\end{aligned}$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $2 \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^0 \frac{2^j - 1}{2-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}.$$

On reconnaît alors deux binômes de Newton :

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} = (2+1)^n - (1+1)^n = 3^n - 2^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} 2^i \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} = 3^n - 2^n.}$$

2. Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} \frac{1}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{k+1} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!} \frac{1}{n+1} \\
&= \binom{n+1}{k+1} \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}\frac{1}{n+1}.}$$

3. Par la question précédente, on a

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\frac{(-1)^k}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k.$$

Posons $\tilde{k}=k+1$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{n+1}\sum_{\tilde{k}=1}^{n+1}\binom{n+1}{\tilde{k}}(-1)^{\tilde{k}-1}\\
&=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k \qquad \text{car l'indice de sommation est muet}\\
&=-\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k-\binom{n+1}{0}(-1)^0\right)\\
&=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k+\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

On reconnaît alors un binôme de Newton :

$$S_n=-\frac{1}{n+1}(1-1)^{n+1}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n=\frac{1}{n+1}.}$$

Joli !

4. On effectue l'inversion d'indice suivant : on pose $\tilde{k}=n-k$. Alors,

$$\begin{aligned}
T_n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{n-k+1}\\
&=\sum_{\tilde{k}=0}^{n}\binom{n}{n-\tilde{k}}\frac{(-1)^{n-\tilde{k}}}{\tilde{k}+1}\\
&=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\frac{(-1)^k}{k+1} \qquad \text{car l'indice est muet}\\
&=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} \qquad \text{car } \binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}\\
&=(-1)^n S_n.
\end{aligned}$$

Conclusion, par la question précédente,

$$\boxed{T_n=\frac{(-1)^n}{n+1}.}$$

Exercice II - Fonctions usuelles

On considère la fonction suivante :

$$\mathrm{th} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}. \end{array}$$

On pose ensuite

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\mathrm{sh}(x)\right) + \arccos\left(\mathrm{th}(x)\right). \end{array}$$

L'objectif est de montrer que f est une fonction constante.

Partie 1 : Etude de la fonction tangente hyperbolique

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1 > 0$ donc $\mathrm{ch}(x) \neq 0$. Ainsi la fonction th est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, th est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions qui le sont. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction th est définie et même dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

2. Par définition,

$$\mathrm{th}(0) = \frac{\mathrm{sh}(0)}{\mathrm{ch}(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

De même,

$$\mathrm{th}\left(\ln(2)\right) = \frac{\mathrm{sh}\left(\ln(2)\right)}{\mathrm{ch}\left(\ln(2)\right)} = \frac{\frac{\mathrm{e}^{\ln(2)} - \mathrm{e}^{-\ln(2)}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^{\ln(2)} + \mathrm{e}^{-\ln(2)}}{2}} = \frac{\mathrm{e}^{\ln(2)} - \mathrm{e}^{-\ln(2)}}{\mathrm{e}^{\ln(2)} + \mathrm{e}^{-\ln(2)}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{th}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{th}\left(\ln(2)\right) = \frac{3}{5}.}$$

3. La fonction th est définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est bien centré en 0. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}\left(-x\right) = \frac{\mathrm{sh}\left(-x\right)}{\mathrm{ch}\left(-x\right)} = \frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \qquad \text{car } \begin{cases} \text{sh est impaire} \\ \text{ch est paire.} \end{cases}$$
$$= -\mathrm{th}(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction th est impaire.}}$$

4. On a vu que th est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x).}$$

5. Par la question précédente, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.}$$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on observe que

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

En factorisant par le terme prépondérant, on obtient

$$\operatorname{th}(x) = \frac{e^x}{e^x}\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$. Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de th admet une asymptote horizontale d'équation } y = 1 \text{ en } +\infty.}$$

7. On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}'(x) > 0$. On en déduit que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = 1$. Comme la fonction th est impaire, on en déduit directement que $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th}(x) = -1$. Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
th	-1 $\nearrow$	0	$\nearrow$ 1

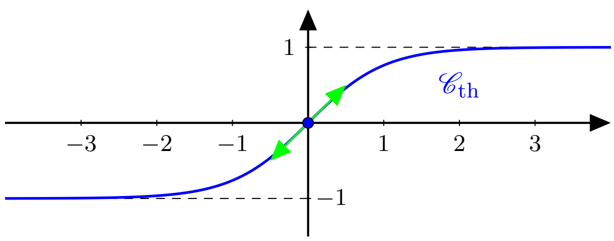
8. Puisque la fonction th est dérivable en 0, elle admet une tangente en ce point d'équation

$$y = \operatorname{th}'(0)\,(x - 0) + \operatorname{th}(0) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(0)}x + 0 = x.$$

Conclusion, l'équation de la tangente en 0 de th est donnée par

$$\boxed{y = x.}$$

9. Par ce qui précède, on a



10. Par ce qui précède :

- th est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
- th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc par le théorème de la bijection, th définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\operatorname{th}(\mathbb{R})$ et de plus, $\operatorname{th}(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x); \lim_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x)\right[= \left]-1;1\right[$. Conclusion,

$$\boxed{\text{th est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } J = \left]-1;1\right[.}$$

On note $\operatorname{argth} = \operatorname{th}^{-1}$ sa fonction réciproque.

11. Par ce qui précède,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} \neq 0.$$

Par conséquent, on a

- th est strictement monotone sur $\mathbb{R}$
- th est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}'(x) \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, on en déduit que argth est dérivable sur $J = \left]-1;1\right[$ et de plus,

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x))}.$$

Or nous avions également vu que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}'(u) = 1 - \operatorname{th}^2(u)$. D'où

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1 - (\operatorname{th}(\operatorname{argth}(x)))^2} = \frac{1}{1-x^2},$$

car argth est la réciproque de th. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction argth est dérivable sur } \left]-1;1\right[\qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left]-1;1\right[,\ \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.}$$

12. Pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, on observe que

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}.$$

Vous ne l'avez pas vu directement ? Ok, voici donc une rédaction plus pédestre. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \left]-1;1\right[, && \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \left]-1;1\right[, && \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a + ax + b - bx}{(1-x)(1+x)} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \left]-1;1\right[, && \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{(a-b)x + a + b}{(1-x)(1+x)}.
\end{aligned}$$

On note alors **QU'IL SUFFIT** de prendre

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = b \\ 2a = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on a

$$\forall x \in\in \left]-1;1\right[, \qquad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}.$$

Donc par la question précédente,

$$\forall x \in\in \left]-1;1\right[, \qquad \mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{2\,(1-x)} + \frac{1}{2\,(1+x)}.$$

Par primitivation, on obtient

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in\in \left]-1;1\right[, \qquad \mathrm{argth}(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(|1-x|\right) + \frac{1}{2}\ln\left(|1+x|\right) + C.$$

Or pour $x \in \left]-1;1\right[$, $1-x>0$ et $1+x>0$. Donc

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in\in \left]-1;1\right[, \qquad \mathrm{argth}(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1-x\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+x\right) + C.$$

De plus, $\mathrm{th}(0)=0$ i.e. $0=\mathrm{argth}(0)$. Donc

$$0 = \frac{1}{2}\ln(1) + \frac{1}{2}\ln(1) + C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad \mathrm{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

Encore joli !

13. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \left]-1;1\right[$. On a les équivalences suivantes :

$$y = \mathrm{th}(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}} \qquad \text{comme vu à la question 6.}$$

Posons $X = \mathrm{e}^{x} \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
y = \mathrm{th}(x) \qquad &\Leftrightarrow \qquad y = \frac{X-\frac{1}{X}}{X+\frac{1}{X}} \\
&\Leftrightarrow \qquad y = \frac{X^2-1}{X^2+1} \qquad \text{car } X \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \qquad y\left(X^2+1\right) = X^2-1 \qquad \text{car } X^2+1 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \qquad X^2\left(y-1\right) = -1-y \\
&\Leftrightarrow \qquad X^2 = \frac{1+y}{1-y} \qquad \text{car } y \in \left]-1;1\right[\ \Rightarrow\ 1-y \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \qquad X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \qquad \text{car } \begin{cases} 1+y>0 \text{ et } 1-y>0 \text{ et donc } \frac{1+y}{1-y}>0 \\ X = \mathrm{e}^{x} > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{x} = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \\
&\Leftrightarrow \qquad x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) \qquad \text{car } \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} > 0
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $y \in \left]-1;1\right[$, l'équation $y = \mathrm{th}(x)$ admet une unique solution donnée par $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. On retrouve bien que $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to \left]-1;1\right[$ est bijective et que

$$\boxed{\forall y \in \left]-1;1\right[, \qquad \mathrm{argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$$

14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $k^2+3k+1>1$ donc $\frac{1}{k^2+3k+1} \in]0;1[\subseteq]-1;1[$ donc $\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)$ existe. De plus,

$$\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{k^2+3k+1}}{1-\frac{1}{k^2+3k+1}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k^2+3k+1+1}{k^2+3k+1-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k^2+3k+2}{k^2+3k}\right).$$

D'autre part, on a $k+1>1$ et $k+2>1$ donc $\frac{1}{k+1} \in]-1;1[$ et $\frac{1}{k+2} \in]-1;1[$ et ainsi, $\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right)$ et $\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)$ existent. Enfin, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{k+1}}{1-\frac{1}{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{k+2}}{1-\frac{1}{k+2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{k+1}}{1-\frac{1}{k+1}} \times \frac{1-\frac{1}{k+2}}{1+\frac{1}{k+2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k+1+1}{k+1-1} \times \frac{k+2-1}{k+2+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k+2}{k} \times \frac{k+1}{k+3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k^2+3k+2}{k^2+3k}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, on observe bien que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right).}$$

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)\right).$$

On reconnaît alors une somme télescopique :

$$S_n = \operatorname{argth}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{n+2}\right).$$

Quand $n \to +\infty$, on a $\frac{1}{n+2} \to 0$. De plus, la fonction argth est dérivable sur $]-1;1[$ et donc notamment continue en 0. Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S_n &= \lim_{n\to+\infty}\left(\operatorname{argth}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{n+2}\right)\right) \\
&= \operatorname{argth}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{argth}(0) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) - 0 \\
&= \frac{1}{2}\ln(3).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}\ln(3).}$$

Joli aussi !

Partie 2 : Etude de f, méthode 1

16. On sait que les fonctions arctan et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ et donc $\arctan \circ \operatorname{sh}$ est définie sur $\mathbb{R}$. D'autre part, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x)$ existe et de plus par la partie précédente, $\operatorname{th}(x) \in]-1;1[\subseteq [-1;1]$. Or arccos est définie sur $[-1;1]$. Donc $\arccos \circ \operatorname{th}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Par somme, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f = \arctan \circ \operatorname{sh} + \arccos \circ \operatorname{th} \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

17. Par composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $\arctan \circ \operatorname{sh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'autre part, th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{th}(\mathbb{R}) =]-1;1[$. Or la fonction arccos est dérivable sur $]-1;1[$ donc par composée, $\arccos \circ \operatorname{th}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par somme,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

18. Par définition,

$$\begin{aligned} f(0) &= \arctan(\operatorname{sh}(0)) + \arccos(\operatorname{th}(0)) \\ &= \arctan(0) + \arccos(0) \qquad \text{par la question 2.} \\ &= 0 + \frac{\pi}{2} \qquad \text{par la question 2.} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{u\to+\infty} \arctan(u) = \frac{\pi}{2}$. Donc par composée,

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(\operatorname{sh}(x)) = \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = 1$ et $\lim\limits_{u\to1} \arccos(u) = \arccos(1) = 0$. Donc par composée,

$$\lim_{x\to+\infty} \arccos(\operatorname{th}(x)) = 0.$$

Par somme

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

De la même façon, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(\operatorname{sh}(x)) = \lim_{u\to-\infty} \arctan(u) = -\frac{\pi}{2}.$$

Et

$$\lim_{x\to-\infty} \arccos(\operatorname{th}(x)) = \lim_{u\to-1} \arccos(u) = \pi.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

19. On a vu que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{sh}'(x) \arctan'(\operatorname{sh}(x)) + \operatorname{th}'(x) \arccos'(\operatorname{th}(x)) \\ &= \operatorname{ch}(x) \times \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2(x)} + \left(1 - \operatorname{th}^2(x)\right) \times \frac{-1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2(x)}} \\ &= \frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}^2(x)} - \sqrt{1-\operatorname{th}^2(x)}. \end{aligned}$$

Or on se rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\operatorname{sh}^2(x) = \operatorname{ch}^2(x)$. De plus, $1-\operatorname{th}^2(x) = \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$, D'où,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} - \sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} - \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \qquad \text{car } \operatorname{ch}(x) > 0.$$

Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 0.$$

Super joli !

20. Par la question précédente,

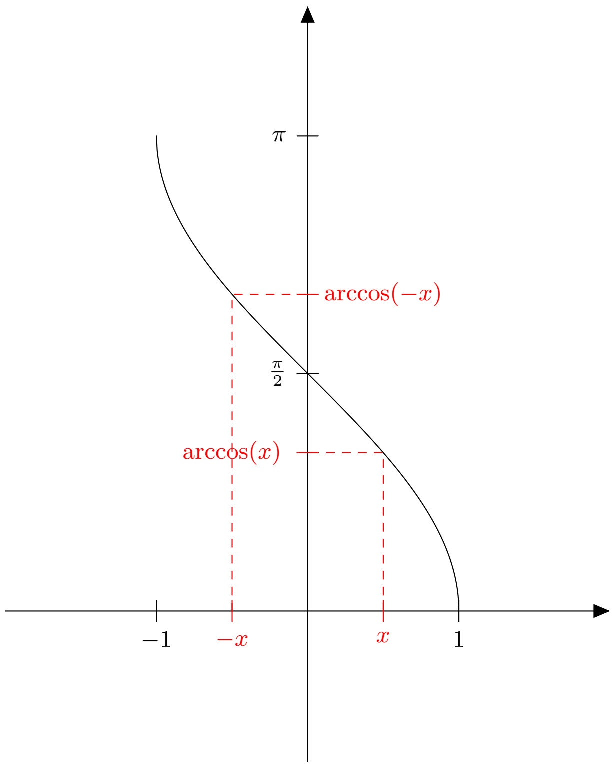
$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = C.$$

Or on a vu que $f(0) = \frac{\pi}{2}$ par exemple et donc $C = \frac{\pi}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

Partie 3 : Etude de f, méthode 2

21. (a) On a le graphe suivant :



Le graphe de arccos admet le point $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ comme centre de symétrie, autrement dit, on observe qu'en faisant la moyenne de $\arccos(-x)$ et $\arccos(x)$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad \frac{\arccos(-x) + \arccos(x)}{2} = \frac{\pi}{2}.}$$

(b) Soit $g : x \mapsto \frac{\arccos(-x)+\arccos(x)}{2}$. La fonction arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$, on a $-x \in]-1;1[$ donc par composée $x \mapsto \arccos(-x)$ est dérivable aussi sur $]-1;1[$. Par somme, la fonction g est dérivable sur $]-1;1[$. De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in\,]-1;1[\,, \qquad g'(x) &= \frac{1}{2}\left(-\arccos'(-x)+\arccos'(x)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in\,]-1;1[\,,\qquad g(x)=C.$$

En particulier, $g(0)=\frac{\arccos(0)+\arccos(0)}{2}=\frac{\pi/2+\pi/2}{2}=\frac{\pi}{2}$. Donc $C=\frac{\pi}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x\in\,]-1;1[\,,\qquad \frac{\arccos(-x)+\arccos(x)}{2}=\frac{\pi}{2}.}$$

(c) Soit $x\in\mathbb{R}$, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \arctan(\mathrm{sh}(-x))+\arccos(\mathrm{th}(-x)) \\ &= \arctan(-\mathrm{sh}(x))+\arccos(-\mathrm{th}(x)) && \text{car sh est impaire et par la question 3. th aussi}\\ &= -\arctan(\mathrm{sh}(x))+\arccos(-\mathrm{th}(x)) && \text{car arctan est impaire.}\end{aligned}$$

Or par la question précédente, pour tout $u\in\,]-1;1[$, $\arccos(-u)=\pi-\arccos(u)$. Donc en prenant $u=\mathrm{th}(x)\in\,]-1;1[$,

$$f(-x)=-\arctan(\mathrm{sh}(x))+\pi-\arccos(\mathrm{th}(x))=\pi-f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(-x)=\pi-f(x).}$$

On fixe dans la suite $x\in\mathbb{R}_+$. On pose $a=\mathrm{sh}(x)$, $u=\arctan(a)$, $b=\mathrm{th}(x)$ et $v=\arccos(b)$.

22. Puisque $x\in\mathbb{R}_+$, on a $a=\mathrm{sh}(x)\geqslant 0$ donc $a\in\mathbb{R}_+$ puis $u=\arctan(a)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. De même, si $x\geqslant 0$, alors $\mathrm{th}(x)\geqslant 0$ donc $b=\mathrm{th}(x)\in[0;1[$ et donc $v\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$. Conclusion,

$$\boxed{u\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\qquad\text{et}\qquad v\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right].}$$

23. On sait que $\cos^2(v)+\sin^2(v)=1$ donc

$$\sin^2(v)=1-\cos^2(v)=1-\cos^2(\arccos(b))=1-(\cos(\arccos(b)))^2=1-b^2.$$

D'où $\sin(v)=\pm\sqrt{1-b^2}$. Or $v\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin(v)>0$. Ainsi,

$$\boxed{\sin(\arccos(b))=\sin(v)=\sqrt{1-b^2}.}$$

24. Puisque $u = \arctan(a) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, on sait que
$$\frac{1}{\cos^2(v)} = \tan'(v) = 1 + \tan^2(v).$$
Or $1 + \tan^2(v) \geqslant 1 > 0$. Donc par passage à l'inverse,
$$\cos^2(v) = \frac{1}{1+\tan^2(v)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(a))} = \frac{1}{1+a^2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\cos^2(\arctan(a)) = \frac{1}{1+a^2}.}$$

25. Par la question précédente, on en déduit que $\cos(\arctan(a)) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Or $u = \arctan(a) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\arctan(a)) > 0$. Ainsi,
$$\boxed{\cos(\arctan(a)) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.}$$

26. Par ce qui précède, on a
$$\sin^2(\arctan(a)) = 1 - \cos^2(\arctan(a)) = 1 - \frac{1}{1+a^2} = \frac{a^2}{1+a^2}.$$
Donc
$$\sin(\arctan(a)) = \pm\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{1+a^2}}.$$
Or $a \in \mathbb{R}_+$ donc $\sqrt{a^2} = a$ donc $\sin(\arctan(a)) = \pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. Or $\arctan(a) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\sin(\arctan(a)) \geqslant 0$. Ainsi,
$$\boxed{\sin(\arctan(a)) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.}$$

27. Par définition,
$$\cos(f(x)) = \cos(\arctan(\operatorname{sh}(x)) + \arccos(\operatorname{th}(x))) = \cos(u+v)$$
Par la formule de développement,
$$\cos(f(x)) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v).$$
Or, par ce qui précède :
$$\begin{aligned}
\cos(u) &= \cos(\arctan(a)) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\
\cos(v) &= \cos(\arccos(b)) = b \\
\sin(u) &= \sin(\arctan(a)) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \\
\sin(v) &= \sin(\arccos(b)) = \sqrt{1-b^2}.
\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\cos(f(x)) = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{a\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{b - a\sqrt{1-b^2}}{\sqrt{1+a^2}}.$$
En réinjectant les valeurs de $a = \operatorname{sh}(x)$ et $b = \operatorname{th}(x)$:
$$\cos(f(x)) = \frac{\operatorname{th}(x) - \operatorname{sh}(x)\sqrt{1-\operatorname{th}^2(x)}}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(x)}}.$$

Or $\sqrt{1+\text{sh}^2(x)} = \sqrt{\text{ch}^2(x)} = \text{ch}(x)$ car $\text{ch}(x) > 0$. D'autre part, $\sqrt{1-\text{th}^2(x)} = \sqrt{\text{th}'(x)} = \sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}} = \frac{1}{\text{ch}(x)}$ car $\text{ch}(x) > 0$. Ainsi,

$$\cos(f(x)) = \frac{\text{th}(x) - \text{sh}(x)\frac{1}{\text{ch}(x)}}{\text{ch}(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(f(x)) = 0.}$$

Tout ça pour ça... incroyable !

28. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Avec les notations précédentes, on a vu que $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $v \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$. Nécessairement,

$$f(x) = u + v \in \left]0; \pi\right[.$$

Or l'unique valeur d'annulation du cosinus sur $]0;\pi[$ est en $\frac{\pi}{2}$. Donc

$$\cos(f(x)) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

Nous pourrions tout recommencer pour $x \in \mathbb{R}_-$ mais naturellement, nous allons plutôt utiliser la relation établie en question 21.c Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Posons $y = -x$, alors $y \in \mathbb{R}_+$ donc $f(y) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, par la question 21.c

$$f(x) = \pi - f(-x) = \pi - f(y) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

Comment douter de la beauté des mathématiques après ça.

Exercice III - Complexes

Les trois parties sont indépendantes.

Partie 1 : Une équation de degré 3

On considère l'équation suivante

$$(E) : \qquad z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0.$$

1. Soit $z \in i\mathbb{R}$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $z = iy$. Dès lors, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (iy)^3 + (1+i)(iy)^2 + (2-2i)iy + 8i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -iy^3 - (1+i)y^2 + (2i+2)y + 8i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad i\left(-y^3 - y^2 + 2y + 8\right) + \left(-y^2 + 2y\right) = 0. \end{aligned}$$

Puisque y **est réel** on obtient par unicité de la forme algébrique

$$z \text{ est solution de } (E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} -y^3 - y^2 + 2y + 8 = 0 \\ -y^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

Or

$$-y^2+2y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y\,(2-y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=0 \ \text{ OU } y=2.$$

Or si $y=0$, on a

$$-y^3-y^2+2y+8=8\neq 0.$$

Donc $y=0$ n'est pas solution. Si $y=2$,

$$-y^3-y^2+2y+8=-8-4+4+8=0.$$

Ainsi,

$$z \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad y=2 \quad \Leftrightarrow \quad z=2i.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions imaginaires pures sont

$$\boxed{\mathscr{S}_{i\mathbb{R}}=\{2i\}\,.}$$

2. Puisque $2i$ est une racine du polynôme $X^3+(1+i)\,X^2+(2-2i)\,X+8i$, on en déduit que $X-2i$ divise $X^3+(1+i)\,X^2+(2-2i)\,X+8i$. On a la division euclidienne suivante :

$$\begin{array}{cccc|l}
X^3 & +(1+i)\,X^2 & +(2-2i)\,X & +8i & X-\quad 2i \\ \cline{5-5}
-(X^3 & -2iX^2) & & & X^2+(1+3i)\,X\ -4 \\ \cline{1-2}
 & (1+3i)\,X^2 & +(2-2i)\,X & +8i & \\
 & -((1+3i)\,X^2 & +(-2i+6)\,X) & & \\ \cline{2-3}
 & & -4X & +8i & \\
 & & -(-4X & +8i) & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, pour $z\in\mathbb{C}$,

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad (z-2i)\left(z^2+(1+3i)\,z-4\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=2i \ \text{ OU } \ z^2+(1+3i)\,z-4=0.$$

Posons Δ le discriminant de $z^2+(1+3i)\,z-4$. On a

$$\Delta=(1+3i)^2+16=1+6i-9+16=8+6i.$$

Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\delta=x+iy$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta^2=\Delta \quad &\Leftrightarrow \quad (x+iy)^2=8+6i \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ 2xy=6 \\ |\delta|^2=|8+6i|=\sqrt{64+36}=10 \end{cases} && \text{par unicité de la forme algébrique} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ xy=3 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2=9 & L_1\leftarrow \frac{L_1+L_2}{2} \\ y^2=1 & L_2\leftarrow \frac{L_2-L_1}{2} \\ xy=3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases} && \text{car } xy\geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \delta=3+i \ \text{ OU } \ \delta=-3-i.
\end{aligned}$$

Dès lors, les racines de $z^2 + (1+3i)\,z - 4$ sont

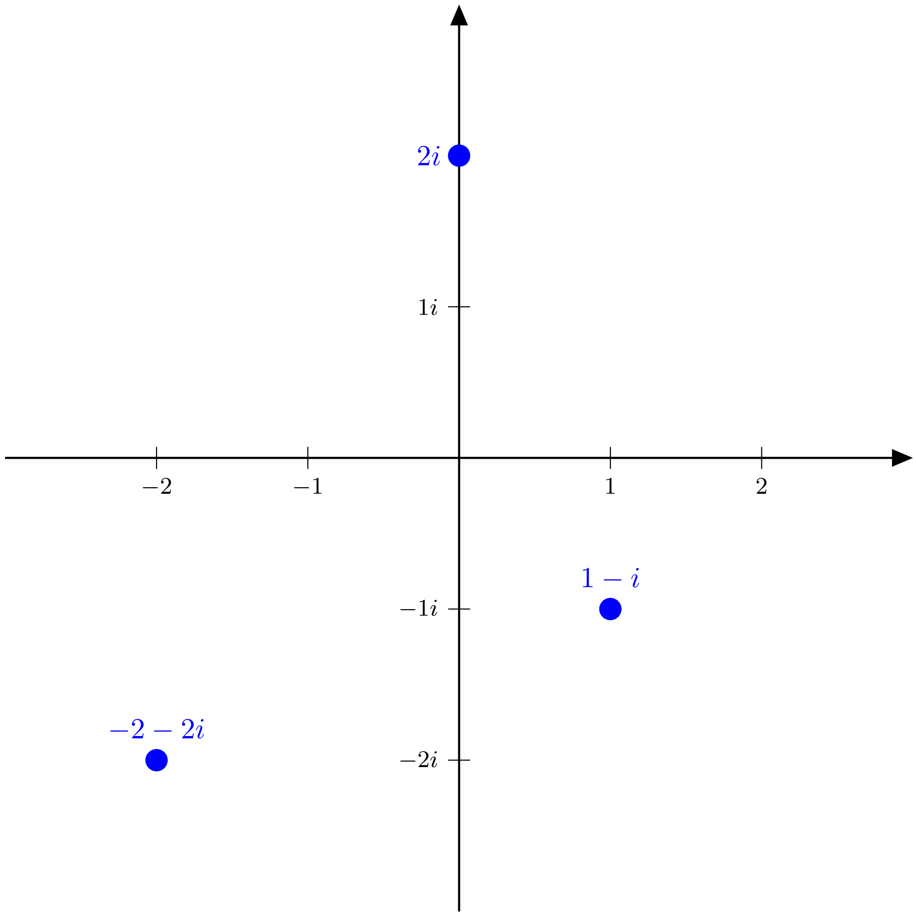
$$z_1 = \frac{-1-3i+3+i}{2} = 1-i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-1-3i-3-i}{2} = -2-2i.$$

Ainsi,

$$(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 2i \;\text{ OU }\; z = 1-i \;\text{ OU }\; z = -2-2i.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathscr{S} = \{2i; 1-i; -2-2i\}\,.}$$



Partie 2 : Un soupçon de géométrie

On pose A le point d'affixe $1-i$ et B celui d'affixe $-2-2i$.

3. Puisque $B \neq O$, on sait que

$$\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right) \; [2\pi]\,.$$

Or

$$\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \frac{1-i-0}{-2-2i-0} = \frac{1-i}{-2\,(1+i)} = -\frac{1}{2}\frac{(1-i)^2}{1+1} = -\frac{1-2i-1}{4} = -\frac{-2i}{4} = \frac{i}{2}.$$

En particulier,

$$\arg\left(\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]\,.}$$

On en déduit directement que

$$\boxed{\text{le triangle } BOA \text{ est rectangle en } O.}$$

4. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} OA &= |z_A - z_O| = |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ OB &= |z_B - z_O| = |-2-2i| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \\ BA &= |z_B - z_A| = |-2-2i-(1-i)| = |-3-i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{OA = \sqrt{2}, \qquad OB = 2\sqrt{2}, \qquad BA = \sqrt{10}.}$$

On observe alors que

$$OA^2 + OB^2 = 2 + 8 = 10 = BA^2.$$

Donc par la réciproque du théorème de Pythagore, on retrouve bien que

$$\boxed{\text{le triangle } BOA \text{ est rectangle en } O.}$$

5. On pose A' l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Dès lors,

$$z_{A'} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_B - z_0\right) + z_O = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\left(-2-2i-0\right) + 0 = i\left(-2-2i\right) = 2-2i.$$

Puisque $A' \neq O$, on a

$$\frac{z_{A'} - z_O}{z_A - z_O} = \frac{2-2i}{1-i} = 2 \in \mathbb{R}_+.$$

Donc

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{A'} - z_O}{z_A - z_O}\right) \equiv 0 \;\; [2\pi].$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les points } O, A \text{ et } A' \text{ sont alignés.}}$$

Ainsi, en tournant B d'un angle de $\pi/2$, il se retrouve aligné avec O et A i.e. son image se retrouve sur (OA) ou encore cela signifie que $\widehat{BOA} = \pm\frac{\pi}{2}$ et donc on retrouve une fois de plus que $\boxed{\text{le triangle } OBA \text{ est rectangle en } O}$.

Partie 3 : Des racines n-ièmes (quand même)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(F)\;:\qquad \left(1+i\sqrt{3}\right)z^n + \left(-1+i\sqrt{3}\right)z^{2n} - 2z^{3n} - \left(1+i\sqrt{3}\right)z^{4n} + \left(1-i\sqrt{3}\right)z^{5n} = -2.$$

6. Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le cours, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{U}_6 \setminus \{1\} \\ &\Leftrightarrow \quad z \in \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{6}} \;\middle|\; k \in [\![1;5]\!] \right\} \\ &\Leftrightarrow \quad z \in \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}; \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}; -1; \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}; \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} \right\}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$ est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}; \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}; -1; \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}; \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} \right\}.}$$

7. Directement, par la question précédente,

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2};\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};-1;-\frac{1+i\sqrt{3}}{2};\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}.}$$

8. Posons $\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. Par ce qui précède, on a

$$\omega^2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\qquad \omega^3=-1,\qquad \omega^4=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\qquad \omega^5=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Soit $z\in\mathbb{C}$. On en déduit que

$$\begin{array}{lll}(F_0) & \Leftrightarrow & \left(1+i\sqrt{3}\right)z+\left(-1+i\sqrt{3}\right)z^2-2z^3-\left(1+i\sqrt{3}\right)z^4+\left(1-i\sqrt{3}\right)z^5=-2\\ & \Leftrightarrow & 2\,\omega\,z+2\,\omega^2\,z^2+2\,\omega^3\,z^3+2\,\omega^4\,z^4+2\,\omega^5\,z^5=-2\\ & \Leftrightarrow & 1+\omega\,z+\omega^2\,z^2+\omega^3\,z^3+\omega^4\,z^4+\omega^5\,z^5=0.\end{array}$$

Posons $z_1=\omega\,z$. Alors,

$$\begin{array}{lll}(F_0) & \Leftrightarrow & 1+z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4+z_1^5=0\\ & \Leftrightarrow & z_1\in\mathbb{U}_6\setminus\{1\}\\ & \Leftrightarrow & \exists k\in[\![1;5]\!],\qquad z_1=\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}}\\ & \Leftrightarrow & \exists k\in[\![1;5]\!],\qquad \omega\,z=\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}}\\ & \Leftrightarrow & \exists k\in[\![1;5]\!],\qquad z=\frac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}}=\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}}=\mathrm{e}^{i\frac{(k-1)\pi}{3}}\\ & \Leftrightarrow & \exists k\in[\![0;4]\!],\qquad z=\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}}.\end{array}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (F_0) est

$$\boxed{\mathscr{S}_{F_0}=\left\{1;\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}};\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}};-1;\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}.}$$

9. Soit $z\in\mathbb{C}$. Posons $\zeta=z^n$. Alors, on observe que

$$z\text{ est solution de }(E)\qquad\Leftrightarrow\qquad \zeta\text{ est solution de }(F_0).$$

Donc par la question précédente, on a

$$\begin{array}{lll}(E) & \Leftrightarrow & \exists k\in[\![0;4]\!],\qquad \zeta=\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}}\\ & \Leftrightarrow & \exists k\in[\![0;4]\!],\qquad z^n=\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}}\\ & \Leftrightarrow & \exists k\in[\![0;4]\!],\ \exists p\in[\![0;n-1]\!],\qquad z=\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3n}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2p\pi}{n}}.\end{array}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E=\left\{\mathrm{e}^{i\frac{(k+6p)\pi}{3n}}\ \middle|\ (k,p)\in[\![0;4]\!]\times[\![0;n-1]\!]\right\}=\left\{\mathrm{e}^{i\frac{r\pi}{3n}}\ \middle|\ r\in[\![0;6n-1]\!],r\not\equiv 5\ [6]\right\}.}$$

Exercice IV - Complexes

On étend la définition de la fonction ch sur $\mathbb{C}$ par

$$\forall z\in\mathbb{C},\qquad \mathrm{ch}(z)=\frac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les égalités entre complexes suivantes :
$$\mathrm{ch}\,(-z) = \frac{\mathrm{e}^{-z} + \mathrm{e}^{z}}{2} = \mathrm{ch}(z).$$
De plus,
$$\mathrm{ch}\,(z+2i\pi) = \frac{\mathrm{e}^{z+2i\pi} + \mathrm{e}^{-z-2i\pi}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{z}\,\mathrm{e}^{2i\pi} + \mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{e}^{-2i\pi}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2} = \mathrm{ch}(z).$$
Enfin,
$$\mathrm{ch}\,(z+i\pi) = \frac{\mathrm{e}^{z+i\pi} + \mathrm{e}^{-z-i\pi}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{z}\,\mathrm{e}^{i\pi} + \mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{e}^{-i\pi}}{2} = \frac{-\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2} = -\,\mathrm{ch}(z).$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{ch}\,(-z) = \mathrm{ch}\,(z+2i\pi) = \mathrm{ch}(z) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}\,(z+i\pi) = -\,\mathrm{ch}(z).}$$
On pourrait encore dire que ch *est paire et* $2i\pi$*-périodique.*

2. Soit $b \in \mathbb{R}$. Par la formule d'Euler *(notre maître à tous)*,
$$\mathrm{ch}\,(ib) = \frac{\mathrm{e}^{ib} + \mathrm{e}^{-ib}}{2} = \cos(b).$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall b \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}\,(ib) = \cos(b).}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a les égalités entre complexes suivantes :
$$\overline{\mathrm{ch}(z)} = \overline{\left(\frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}\right)} = \frac{\overline{\mathrm{e}^{z}} + \overline{\mathrm{e}^{-z}}}{2}.$$
Par une propriété de l'exponentielle complexe,
$$\overline{\mathrm{ch}(z)} = \frac{\mathrm{e}^{\overline{z}+\mathrm{e}^{-\overline{z}}}}{2} = \mathrm{ch}\left(\overline{z}\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \overline{\mathrm{ch}(z)} = \mathrm{ch}\left(\overline{z}\right).}$$
Il commence à devenir un peu trop facile ce DM...

4. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On a les égalités entre complexes suivantes :
$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b) &= \frac{\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{-a}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{b} + \mathrm{e}^{-b}}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{a+b} + \mathrm{e}^{a-b} + \mathrm{e}^{-(a-b)} + \mathrm{e}^{-(a+b)}}{4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{a+b} + \mathrm{e}^{-(a+b)}}{4} + \frac{\mathrm{e}^{a-b} + \mathrm{e}^{-(a-b)}}{4} \\
&= \frac{\mathrm{ch}\,(a+b) + \mathrm{ch}\,(a-b)}{2}.
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall\,(a,b) \in \mathbb{C}^2, \qquad \mathrm{ch}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b) = \frac{\mathrm{ch}\,(a+b) + \mathrm{ch}\,(a-b)}{2}.}$$
Espérons que la prochaine soit un peu plus difficile.

5. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + ib$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{ch}\,(z)|^2 &= \mathrm{ch}\,(z)\,\overline{\mathrm{ch}\,(z)} \\
&= \mathrm{ch}\,(z)\,\mathrm{ch}\,(\overline{z}) && \text{par la question 3.} \\
&= \frac{\mathrm{ch}\,(z+\overline{z}) + \mathrm{ch}\,(z-\overline{z})}{2} && \text{par la question 4.} \\
&= \frac{\mathrm{ch}\,(2\mathrm{Re}\,(z)) + \mathrm{ch}\,(2i\mathrm{Im}\,(z))}{2} \\
&= \frac{\mathrm{ch}\,(2a) + \mathrm{ch}\,(2ib)}{2} \\
&= \frac{\mathrm{ch}\,(2a) + \cos\,(2b)}{2} && \text{par la question 2.}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |\mathrm{ch}\,(z)|^2 = \frac{\mathrm{ch}\,(2a) + \cos\,(2b)}{2}.}$$

6. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{ch}(z) = 0$. On pose $X = \mathrm{e}^z$.

(a) On a les équivalences suivantes

$$\mathrm{ch}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X + \frac{1}{X}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X + \frac{1}{X} = 0.$$

Supposons $X = 0$, alors $\mathrm{e}^z = 0$. Posons $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Alors,

$$0 = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a+ib} = \mathrm{e}\,a\,\mathrm{e}^{ib}.$$

Donc par exemple en prenant le module, on obtient $0 = \mathrm{e}^a$ ce qui est absurde (car $a \in \mathbb{R}$ et donc $\mathrm{e}^a > 0$). Donc $X \neq 0$. Dès lors,

$$\mathrm{ch}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad X = i \ \text{ OU } \ X = -i.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{ch}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = i \ \text{ OU } \ X = -i.}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Par la question précédente,

$$\mathrm{ch}\,(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^z = i \ \text{ OU } \ \mathrm{e}^z = -i \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \ \text{ OU } \ \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Par la pseudo-unicité de la forme trigonométrique, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{e}^a = 1 \\ b \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases} \ \text{ OU } \ \begin{cases} \mathrm{e}^a = 1 \\ b \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases} \ \text{ OU } \ \begin{cases} a = 0 \\ b \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ et } b \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \in \mathbb{C} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

7. Soient $z \in \mathbb{C}$, $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$ et $X = \mathrm{e}^z$. On a vu que $X \neq 0$. Dès lors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(z) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad X + \frac{1}{X} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad X^2 - 2X + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (X-1)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad X = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{ib} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ ET } b \equiv 0 \ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad z = 2ik\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = 2i\pi\mathbb{Z}.}$$

8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Premier cas, si k est pair : $\exists p \in \mathbb{Z}$, $k = 2p$, alors par la question 1.

$$\mathrm{ch}\,(a + ik\pi) = \mathrm{ch}\,(a + 2ip\pi) = \mathrm{ch}(a) = (-1)^{2p}\,\mathrm{ch}(a) = (-1)^k\,\mathrm{ch}(a).$$

Si k est impair, $\exists p \in \mathbb{Z}$, $k = 2p+1$, toujours par la qestion 1.

$$\mathrm{ch}\,(a + ik\pi) = \mathrm{ch}\,(a + i\,(2p+1)\,\pi) = \mathrm{ch}\,(a + i\pi + 2ip\pi) = \mathrm{ch}\,(a + i\pi) = -\,\mathrm{ch}(a) = (-1)^k\,\mathrm{ch}(a).$$

Conclusion, dans tous les cas, on a

$$\boxed{\mathrm{ch}\,(a + ik\pi) = (-1)^k\,\mathrm{ch}(a).}$$

9. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $z = a + ib$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,(\mathrm{ch}(z)) &= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^a \mathrm{e}^{ib} + \mathrm{e}^{-a} \mathrm{e}^{-ib}}{2}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^a\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ib}\right) + \mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-ib}\right)}{2} && \text{car } \left(\mathrm{e}^a, \mathrm{e}^{-a}, 2\right) \in \mathbb{R}^3 \\
&= \frac{\mathrm{e}^a \cos(b) + \mathrm{e}^{-a}\cos(b)}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}}{2}\cos(b) \\
&= \mathrm{ch}(a)\cos(b).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(\mathrm{ch}(z)) &= \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^a \mathrm{e}^{ib} + \mathrm{e}^{-a} \mathrm{e}^{-ib}}{2}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^a \sin(b) - \mathrm{e}^{-a}\sin(b)}{2} \\
&= \mathrm{sh}(a)\sin(b).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\mathrm{ch}(z)\right) = \mathrm{ch}(a)\cos(b) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\left(\mathrm{ch}(z)\right) = \mathrm{sh}(a)\sin(b).}$$

On note que

$$\begin{aligned} Re\left(\mathrm{ch}(z)\right)^2 + Im\left(\mathrm{ch}(z)\right)^2 &= \mathrm{ch}^2(a)\cos^2(b) + \mathrm{sh}^2(a)\sin^2(b) \\ &= \mathrm{ch}^2(a)\cos^2(b) + \left(\mathrm{ch}^2(a) - 1\right)\left(1 - \cos^2(b)\right) \\ &= \mathrm{ch}^2(a) - 1 + \cos^2(b). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\frac{\mathrm{ch}\,(2a) + \cos\,(2b)}{2} = \frac{2\,\mathrm{ch}^2(a) - 1 + 2\cos^2(b) - 1}{2} = \mathrm{ch}^2(a) + \cos^2(b) - 1.$$

Le résultat est donc cohérent avec celui de la question 5. : $|\mathrm{ch}(z)|^2 = \frac{\mathrm{ch}(2a)+\cos(2b)}{2}$.

10. Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{ch}(z) \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow & \mathrm{Im}\left(\mathrm{ch}(z)\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{sh}(a)\sin(b) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{sh}(a) = 0 \ \text{ OU } \ \sin(b) = 0 \\ & \Leftrightarrow & a = 0 \ \text{ OU } \ b \equiv 0 \ [\pi] \\ & \Leftrightarrow & z \in i\mathbb{R} \ \text{ OU } \ \exists k \in \mathbb{Z},\ z = a + ik\pi \end{array}$$

On obtient donc l'axe des ordonnées union toutes les droites horizontales dont l'ordonnée à l'origine est un multiple de π :

$$\boxed{\mathscr{S} = i\mathbb{R} \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{a + ik\pi \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{R}\} \right).}$$

Premier cas, si $z \in i\mathbb{R}$ i.e. $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$. Alors, par la question 2. on a $\mathrm{ch}(z) = \mathrm{ch}\,(ib) = \cos(b)$ et donc on retrouve bien que $\mathrm{ch}(z) \in \mathbb{R}$.

Second cas, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = a + ik\pi$. Alors, par la question 8. on a $\mathrm{ch}(z) = \mathrm{ch}\,(a + ik\pi) = (-1)^k\,\mathrm{ch}(a)$. En particulier, on retrouve toujours que $\mathrm{ch}(z) \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Notre résultat est donc cohérent avec les questions 2. et 8.}}$