Devoir Maison 4
Calcul d'intégrales, Equations différentielles d'ordre 1 et 2

A faire pour le jeudi 08 décembre

Exercice I - Calcul d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partie 1 : L'ordre 1, c'est déjà bien

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n existent.
2. Calculer I_0.
3. Calculer I_1 à l'aide de deux intégrations par parties.
4. Retrouver le résultat précédent en passant par les complexes.

Partie 2 : Un aperçu du chapitre 23, on a hâte !

On ne calculera pas dans cette partie la valeur de I_n.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\qquad I_n \geqslant \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x.$
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\qquad I_n \geqslant \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x.$
7. En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\qquad n^p \underset{n\to+\infty}{\ll} I_n.$
9. A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \mathrm{e}^{n\pi} J_n$.

Partie 3 : Finalement, l'ordre suivant, c'est pas plus méchant

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer I_n par la méthode de votre choix.
11. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de J_n.
12. Retrouver le résultat de la question 7.

Partie 4 : Toujours se ramener à ce que l'on sait faire

13. Après avoir justifié son existence, calculer $K = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\pi}} x^5 \sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x.$
14. Après avoir justifié son existence, calculer $L = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{6x} \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x.$

Exercice II - Equation différentielle d'ordre 2

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = x\,\mathrm{e}^x\,.$$

1. Justifier que (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre (E_0) l'équation différentielle homogène associée sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Justifier qu'il existe une unique solution f de (E) telle que $f(0) = -\frac{4}{49}$ et $f'(0) = 0$ puis la déterminer.
5. Résoudre l'équation (F) : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad t^2 z''(t) + 3tz'(t) + 4z(t) = 0$.
   On pourra poser $x = \ln(t)$.

Exercice III - Equation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad \left(x^2 - 1\right) y'(x) + xy(x) = 1.$$

Partie 1 : L'équation (E) et ses amies

1. Déterminer les intervalles sur lesquels il est possible de résoudre (E).
2. Soit I l'un des intervalles de résolution. Résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E) sur I.
   La réponse doit contenir des valeurs absolues afin que le résultat puisse fonctionner sur n'importe quel I solution.
3. Résoudre (E) sur $]-1;1[$.
4. Résoudre sur $]-1;1[$ l'équation (E_1) : $\forall x \in \,]-1;1[\,, \qquad \left(x^2 - 1\right) y'(x) + xy(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. En déduire sur $]-1;1[$ les solutions de l'équation

$$(E_2)\ : \qquad \forall x \in \,]-1;1[\,, \qquad \left(x^2 - 1\right) y'(x) + xy(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Partie 2 : Intervention discrète mais remarquée de argch

Soit $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

6. Déterminer les intervalles sur lesquels φ admet des primitives.
7. Soit $x \in \,]1;+\infty[$. Montrer que $x - \sqrt{x^2-1} < 1$.
8. Montrer que pour $x > 1$, l'équation $x = \mathrm{ch}(a)$ d'inconnue $a > 0$ admet une unique solution que l'on déterminera.
9. A l'aide du changement de variable $t = \mathrm{ch}(u)$, en déduire les primitives de φ sur $]1;+\infty[$.

On admet dans la suite que $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ est une primitive de φ sur $]1;+\infty[$.

Partie 3 : Symétrie avouée, équation à moitié résolue.

10. Résoudre (E) sur $]1;+\infty[$.
11. Soit y une fonction dérivable sur $]1;+\infty[$. On pose $z : x \mapsto -y(-x)$. Justifier que z est une fonction dérivable sur $]-\infty;-1[$ et montrer que

$$z \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-\infty;-1[\qquad \Leftrightarrow \qquad y \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]1;+\infty[.$$

12. En déduire les solutions de (E) sur $]-\infty;-1[$.