Banque PT - Maths A - 2023
Version pour juniors

Les parties en bleu avec astérisque ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Le sujet est composé de 2 exercices indépendants.

Exercice 1 : Matrices unipotentes

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites *unipotentes* de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et I est la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Etude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.

   On considère les matrices

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) (*) Déterminer les racines du polynôme P défini par $P(X) = \det(XI - A)$.

   (b) (*) Montrer que A n'est pas semblable à la matrice identité I.

   (c) (*) Pour toute racine λ de P, calculer $E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.

   (d) Résoudre l'équation $(A - I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (e) On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Déterminer trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que

   $$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = 2e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_3) = -2e_2 + e_3.$$

   On pourra utiliser la question précédente.

   (f) En déduire une matrice P telle que $A = PBP^{-1}$.

2. Etude de $\mathcal{N}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et sa dimension.

   (b) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout $(N, M) \in \mathcal{N}^2$, on a $NM \in \mathcal{N}$.

   (c) Calculer N^3 pour $N \in \mathcal{N}$.

3. Etude de $\mathcal{U}$.

   (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? On justifiera la réponse.

   (b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.

(c) Montrer que $\mathcal{U} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ où $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Soient $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2.$$

On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.

(a) Calculer $B^{(\alpha)}$ pour $\beta \in \mathbb{R}$ où B est la matrice définie à la question 1.

(b) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$.

(c) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$U^{(\alpha)} U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}.$$

(d) En déduire que $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^{(n)} = \underbrace{U \times \cdots \times U}_{n \text{ fois}}$.

(e) Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geqslant 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$?

(f) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.

5. (a) En utilisant les résultats de la question 4, expliciter une matrice $C\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique ?

(b) En déduire comme déterminer une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice D).

Exercice 2 : Probabilités

Cet exercice comporte trois parties. Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

Un jeu consiste à lancer un ballon dans un panier. On suppose que la probabilité de réussir le panier est $p \in]0;1[$ et que les lancers sont indépendants. On note $q = 1 - p$.

Partie 1 : Etude du jeu de lancer

1. (*) On note T le nombre de lancers nécessaires pour réussir un panier pour la première fois. On note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k la variable aléatoire valant 1 si le panier k est réussi et 0 sinon.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de X_k ?

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$?

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $(T = n)$ à l'aide des variables aléatoires X_k.

(d) En déduire la loi de T.

2. On effectue une infinité de lancers. Calculer la probabilité de réussir au moins un panier.

3. L'organisateur du jeu ne connait pas la valeur de p et souhaite en connaître une valeur apporchée. Pour cela il observe $N \in \mathbb{N}^*$ lancers et note le nombre S_N de paniers réussis.

(a) Quelle est la loi de S_N ? On explicitera la loi en justifiant brièvement la réponse.

(b) Montrer que $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

(c) Montrer que pour $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4N\varepsilon^2}$.

Partie 2 : Un deuxième jeu

Le joueur met une pièce de 1 euro dans un sac à chaque lancer du ballon. Une fois le panier réussi, l'organisateur organise un deuxième jeu :

- L'organisateur enlève une pièce de 1 euro, qu'il garde pour lui, et la remplace par une pièce noire qui donne droit à $M \geqslant 2$ euros.
- Le joueur tire une pièce du sac.
- L'organisateur conserve les autres pièces du sac.

On rappelle que la variable T a été définie à la question 1.

4. On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}^*$ et l'évènement $(T = n)$ est réalisé : il y a donc n pièces dans le sac : $n-1$ pièces de 1 euro et la pièce noire.

   On note G_n la variable aléatoire égale au gain, éventuellement négatif, de l'organisateur.

   (a) Vérifier que $G_n(\Omega) = \{n - M, n - 1\}$, puis donner la loi de G_n.

   (b) Calculer l'espérance de G_n.

5. (*) Déterminer, suivant la valeur de x, la nature des séries suivantes et, en cas de convergence, calculer leurs sommes totales : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$.

   (*) *Indication : on pourra dériver ou primitiver les sommes partielles.*

   On pourra utiliser ces résultats dans les calculs des questions suivantes.

6. On note A l'évènement « tirer la pièce noire ».

   (a) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbf{P}_{(T=n)}(A)$.

   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, dont on justifiera l'utilisation, montrer que
   $$\mathbf{P}(A) = \frac{p}{q}\ln\left(\frac{1}{p}\right).$$

7. On note G la variable aléatoire égale au gain, éventuellement négatif, de l'organisateur après ce deuxième jeu.

   (a) Montrer que $G(\Omega) = \{k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 1 - M\}$.

   (b) Donner pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in G(\Omega)$ la valeur de $\mathbf{P}_{(T=n)}(G = k)$.
   On distinguera les cas $k = n - 1$, $k = n - M$ et $k \notin \{n - 1, n - M\}$.

   (c) En déduire que la loi de G est donnée par : pour tout $k \in G(\Omega)$,
   $$\mathbf{P}(G = k) = \begin{cases} \dfrac{k}{k+1}pq^k + \dfrac{1}{k+M}pq^{k+M-1} & \text{si } k \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{k+M}pq^{k+M-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

8. Calcul de l'espérance de G.

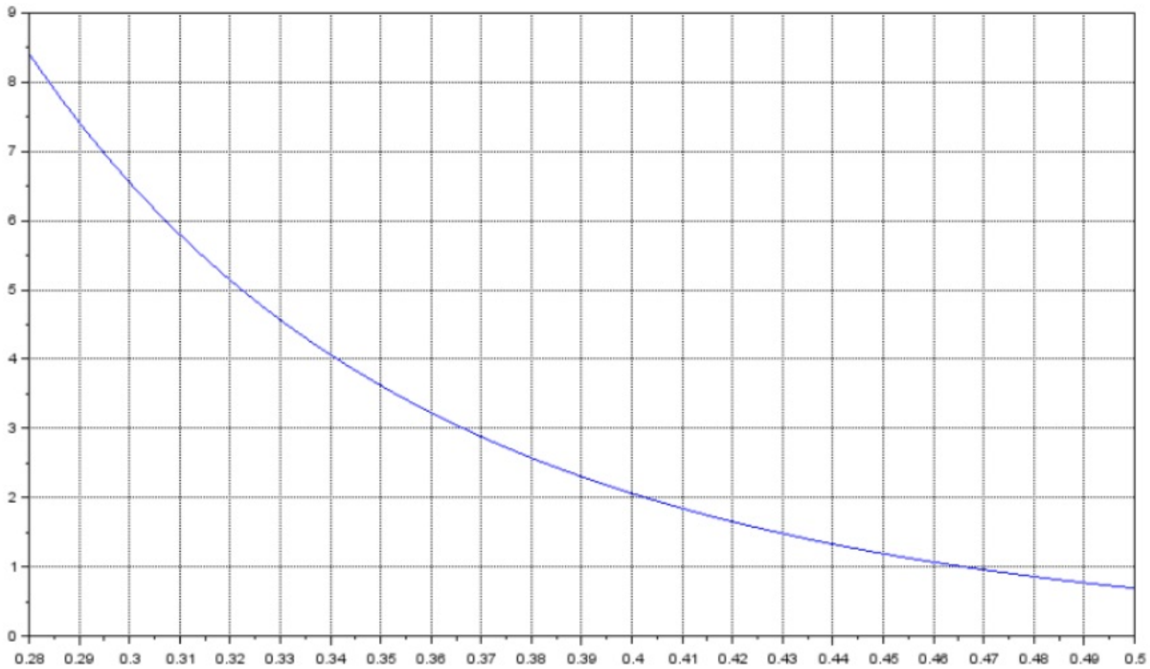
   (a) Montrer que la série de terme général $\mathbf{E}(G_n)\,\mathbf{P}(T = n)$ est convergente.

(b) On admet qu'alors G admet une espérance et

$$\mathbf{E}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}(G_n)\, \mathbf{P}(T = n).$$

Calculer $\mathbf{E}(G)$, que l'on exprimera en fonction de p et M uniquement.

9. Voici un extrait de la courbe représentative de la fonction $\psi : p \mapsto \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)}$.



On dira que le jeu est rentable pour l'organisateur lorsque son espérance de gain est positive. Dans les questions suivantes, on justifiera les résultats obtenus.

(a) Montrer que $\mathbf{E}(G) \geqslant 0 \implies \psi(p) \geqslant M - 1$.

(b) L'organisateur sait que $p = 0,3$. Quelles valeurs de M peut-il choisir pour que le jeu soit rentable ?

(c) L'organisateur souhaite choisir $M = 8$ euros. Quelle valeur maximale de p doit-on avoir pour que ce jeu reste rentable ?

(d) Pour quelles valeurs de p le jeu ne peut pas être rentable ?

Partie 3 : Une autre estimation du paramètre

La partie 1 donne un résultat permettant d'approcher la valeur de p par $\frac{S_N}{N}$. On prouve dans cette partie un résultat similaire en utilisant une méthode dite de grandes déviations. On suppose que $p \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$. Pour $\lambda \geqslant 0$, on pose

$$h(\lambda) = (1-p)\, \mathrm{e}^{-\lambda p} + p\, \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} \quad \text{et} \quad g(\lambda) = \ln h(\lambda).$$

On admet que pour tout $\lambda \geqslant 0$, on a $g(\lambda) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, et on pose $S_N = X_1 + \cdots + X_N$ et $\lambda \geqslant 0$.

10. (a) Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X_1 - p)}\right) = \mathrm{e}^{g(\lambda)}.$$

On justifiera bien le calcul.

(b) En déduire que
$$\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N-Np)}\right)=\mathrm{e}^{\frac{N}{2}\,\lambda^2}\,.$$

(c) En utilisant l'inégalité de Markov, déduire des questions précédentes que pour $\varepsilon>0$, et $\lambda>0$,
$$\mathbf{P}\left(\frac{S_N}{N}-p\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\exp\left(-N\,\lambda\,\varepsilon+\frac{N}{2}\,\lambda^2\right).$$

(d) En choisissant bien λ, en déduire que
$$\mathbf{P}\left(\frac{S_N}{N}-p\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\exp\left(-\frac{N}{2}\,\varepsilon^2\right).$$

(e) On admet que l'on pourrait montrer de manière similaire que
$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_N}{N}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\exp\left(-\frac{N}{2}\,\varepsilon^2\right).$$

On souhaite évaluer l'erreur faite en prenant $\frac{S_N}{N}$ comme valeur approchée de p. Expliquer en quoi la majoration ci-dessus est utile pour faire cette évaluation. A quelle condition sur ε et N la méthode des grandes déviations de la partie 3 est-elle plus intéressante que celle de la partie 1 ?

Un raisonnement, même incomplet, interprétant les résultats obtenus sera valorisé.

Fin de l'épreuve