Corrigé - Banque PT - Maths A - 2023
Version pour juniors

Le sujet est composé de 2 exercices indépendants.

Exercice 1 : Matrices unipotentes

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites *unipotentes* de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et I est la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Etude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.

   On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculons les racines de $P(X) = \det(XI - A)$. Par définition, on a,

$$\begin{aligned}
P(X) &= \det(XI - A) \\
&= \det\left(X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{vmatrix} X+1 & 2 & -4 \\ 0 & X+1 & -2 \\ 2 & 2 & X-5 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X-1 & 2 & -4 \\ X-1 & X+1 & -2 \\ X-1 & 2 & X-5 \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & X+1 & -2 \\ 1 & 2 & X-5 \end{vmatrix} \\
&= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & X-1 & 2 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&= (X-1)(X-1)^2 \qquad \text{car la matrice est triangulaire.}
\end{aligned}$$

   Ainsi, $P(X) = (X-1)^3$. Conclusion, l'ensemble des racines de P est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1\}.}$$

(b) Montrons que A n'est pas semblable à I en procédant par l'absurde. Supposons que A est semblable à la matrice I. Par définition, il existe alors $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PIP^{-1}.$$

Par suite, on a directement, $A = PP^{-1} = I$. Ce dernier résultat étant faux, on en conclut que

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas semblable à la matrice identité } I.}$$

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une racine de P. Par la question 1.a, on a $\lambda = 1$. Calculons donc $E_1 = \mathrm{Ker}\,(A - I)$. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ker}\,(A-I) \quad &\Leftrightarrow \quad (A-I)\,X = 0_{3,1} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{3,1} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x - 2y + 4z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x - 2y + 4z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \text{car } L_3 = L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_3 = L_1 \\ L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -y + 2z = -z + 2z = z \\ y = z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{E_1 = \mathrm{Ker}\,(A - I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).}$$

(d) Résolvons l'équation $(A - I)\,X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(A-I)\,X = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}-2 & -2 & 4\\ 0 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}-2x-2y+4z=2\\ -2y+2z=2\\ -2x-2y+4z=2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}-2x-2y+4z=2\\ -2y+2z=2\end{cases} \qquad \text{car } L_3 = L_1\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x+y-2z=-1\\ y-z=-1\end{cases} \qquad \begin{matrix}L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1\\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2\end{matrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x=-1-y+2z=-1-z+1+2z=z\\ y=z-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix}z\\z-1\\z\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{bmatrix}z\\z-1\\z\end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}.}$$

(e) On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Déterminons trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ e_1, e_2 et e_3 tels que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 2e_1 + e_2$ et $f(e_3) = -2e_2 + e_3$. Posons $e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$. Par la question 1.c on a $e_1 \in E_1$ i.e. $f(e_1) = e_1$. De plus par la question 1.d

$$f(e_2) - e_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2e_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(e_2) = 2e_1 + e_2.$$

Enfin, posons $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme précédemment, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(e_3) = -2e_2 + e_3 \quad & \Leftrightarrow \quad Ae_3 = -2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + e_3 \\
(A-I)e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x - 2y + 4z = 0 \\ -2y + 2z = 2 \\ -2x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y - z = -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{car } L_3 = L_1 \\ L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -y + 2z = -z + 1 + 2z = z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} z+1 \\ z-1 \\ z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Fixons pour $z = 0$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors on a bien $f(e_3) = -2e_2 + e_3$. Conclusion, pour

$$\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},}$$

on a bien $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 2e_1 + e_2$ et $f(e_3) = -2e_2 + e_3$.

(f) Montrons qu'il existe P une matrice telle que $A = PBP^{-1}$. Posons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\det(P) &= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à } C_2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Puisque $\det(P)_n eq 0$, alors P est inversible et donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, par la question précédente, $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 2e_1 + e_2$ et $f(e_3) = -2e_2 + e_3$. Ainsi,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Or f est canoniquement associé à A : $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$. Donc par la formule de changement de base on obtient $A = PBP^{-1}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } A = PBP^{-1}.}$$

2. Etude de $\mathcal{N}$.

(a) Montrons que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et précisons sa dimension. Par définition, on a

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}_{=\mathscr{B}_{\mathcal{N}}} \end{aligned}$$

L'espace $\mathcal{N}$ est bien inclus par définition dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et en tant qu'espace engendré, on en déduit que

$$\boxed{\mathcal{N} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

De plus, la famille $\mathscr{B}_{\mathcal{N}}$ est libre en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et engendre $\mathcal{N}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_{\mathcal{N}} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathcal{N}.}$$

On en déduit également que

$$\boxed{\dim(\mathcal{N}) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_{\mathcal{N}}) = 3.}$$

(b) Montrons que $\mathcal{N}$ est stable par produit. Soit $(N, M) \in \mathcal{N}^2$. Montrons que $NM \in \mathcal{N}$. Par définition, il existe $(a,b,c,a',b',c') \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$NM = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $a'' = 0$, $b'' = ac'$ et $c'' = 0$, on obtient bien $NM = \begin{pmatrix} 0 & a'' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec a'', b'' et c'' trois réels. Donc $NM \in \mathcal{N}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{N} \text{ est stable par produit.}}$$

(c) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ puis } N^3 = 0_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall N \in \mathcal{N}, \quad N^3 = 0_3.}$$

3. Etude de $\mathcal{U}$.

(a) Montrons que $\mathcal{U}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Procédons par l'absurde et supposons que $\mathcal{U}$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Nécessairement, $0_3 \in \mathcal{U}$. Donc il existe $N \in \mathcal{N}$ tel que $0_3 = I + N$. Donc $N = -I$. En particulier, $N^3 = -I \neq 0_3$ ce qui contredit le résultat de la question précédente. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{U} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

(b) Montrons que $\mathcal{U}$ est stable par produit. Soit $(U, V) \in \mathcal{U}^2$. Alors il existe $(N, M) \in \mathcal{N}^2$ tel que $U = I + N$ et $V = I + M$. Par suite,

$$UV = (I + N)(I + M) = I + N + M + NM.$$

Or par la question précédente, puisque $(N, M) \in \mathcal{N}^2$, $NM \in \mathcal{N}$. De plus, $\mathcal{N}$ est un espace vectoriel donc stable par addition. Donc $P = N + M + NM \in \mathcal{N}$. Dès lors, $UV = I + P$, avec $P \in \mathcal{N}$. Donc $UV \in \mathcal{U}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{U} \text{ est stable par produit.}}$$

(c) Montrons que $\mathcal{U} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Soit $U \in \mathcal{U}$. Montrons que U est inversible. Par définition, il existe $N \in \mathcal{N}$ tel que $U = I + N$. Donc il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice U étant triangulaire sans coefficient nul sur la diagonale, on en déduit que U est inversible. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{U} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).}$$

4. Soient $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} N^2.$$

On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.

(a) Calculons $B^{(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, on a bien $N \in \mathcal{N}$ et $B = I + N$. Donc on a bien $B \in \mathcal{U}$. Dès lors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$B^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad B^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & \alpha(\alpha-1)/2 \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(b) Montrons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$. Par la question 2.b $\mathcal{N}$ est stable par produit donc $N^2 \in \mathcal{N}$. Puis par la question 2.a $\mathcal{N}$ est stable par combinaisons linéaires, donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $N_\alpha = \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \in \mathcal{N}$. Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $U^{(\alpha)} = I + N_\alpha$ avec $N_\alpha \in \mathcal{N}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}.}$$

(c) Montrons que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)}$ et $\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} U^{(\alpha)}U^{(\beta)} &= \left(I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2\right)\left(I + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2} N^2\right) \\ &= I + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2} N^2 + \alpha N + \alpha\beta N^2 + \alpha \frac{\beta(\beta-1)}{2} N^3 \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \beta N^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \frac{\beta(\beta-1)}{2} N^4. \end{aligned}$$

Or par la question 2.c on a $N^3 = 0_3$ et donc $N^4 = 0_3$. Ainsi,

$$\begin{aligned} U^{(\alpha)}U^{(\beta)} &= I + (\alpha+\beta) N + \left[\frac{\beta(\beta-1)}{2} + \alpha\beta + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\right] N^2 \\ &= I + (\alpha+\beta) N + \frac{\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2 - \beta - \alpha}{2} N^2 \\ &= I + (\alpha+\beta) N + \frac{(\alpha+\beta)^2 - (\alpha+\beta)}{2} N^2 \\ &= I + (\alpha+\beta) N + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2} N^2 \\ &= U^{(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

D'autre part, $U^{(\alpha)} = I + N_\alpha$ avec $N_\alpha = \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2 \in \mathcal{N}$. Donc

$$\begin{aligned}
\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} &= I + \beta N_\alpha + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N_\alpha^2 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\beta N^2 \\
&\qquad + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\left(\alpha^2N^2 + 2\alpha\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^3 + \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\right)^2 N^4\right) \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\beta N^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\alpha^2N^2 + 0_3 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\alpha\beta}{2}\left(\alpha - 1 + \alpha(\beta-1)\right)N^2 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}{2}N^2 \\
&= U^{(\alpha\beta)}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}.}$$

(d) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^{(n)} = U^n$. Procédons par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $U^{(n)} = U^n$ ».

Initialisation. Si $n = 1$, alors $U^{(1)} = I + 1 \times N + \frac{1(1-1)}{2}N^2 = I + N = U = U^1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi. On a

$$\begin{aligned}
U^{(n+1)} &= U^{(n)}U^{(1)} && \text{par la question précédente avec } \alpha = n \text{ et } \beta = 1 \\
&= U^nU && \text{par hypothèse de récurrence et l'initialisation} \\
&= U^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U^{(n)} = U^n.}$$

(e) Montrons à nouveau que $U^{(n)} = U^n$ par la formule du binôme de Newton. Soit $n \geqslant 2$. Puisque I et N commutent, on a par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
U^n &= (I+N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I^{n-k}N^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k \\
&= \binom{n}{0}I + \binom{n}{1}N + \binom{n}{2}N^2 + 0_3 && \text{car } n \geqslant 2 \text{ et pour tout } k \geqslant 3,\ N^k = 0_3 \\
&= I + nI + \frac{n(n-1)}{2}N^2 \\
&= U^{(n)}.
\end{aligned}$$

De plus, par la question précédente, on a déjà vu que $U^{(1)} = U^1$. Enfin, $U^{(0)} = I + 0_3 = I = U^0$ par définition. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U^{(n)} = U^n.}$$

(f) Montrons que $U^{(-1)} = U^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} UU^{(-1)} &= U^{(1)}U^{(-1)} && \text{par la question précédente} \\ &= U^{(1-1)} && \text{par la question 4.c avec } \alpha = 1 \text{ et } \beta = -1 \\ &= U^{(0)} \\ &= I. \end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve que U est inversible et on observe que

$$\boxed{U^{-1} = U^{(-1)}.}$$

5. (a) *Analyse.* Cherchons $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Autrement dit il nous faudrait B « à la puissance 1/2 ». Cela n'est pas définit, mais on peut calculer cependant $B^{(1/2)}$. Par la question 4.a

$$B^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & (1/2)\left(\frac{1}{2} - 1\right)/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Synthèse. Posons $C = B^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ (par la question 4.b). Alors, par la question 4.d

$$C^2 = C^{(2)} = \left(B^{(1/2)}\right)^{(2)} = B^{(1)} \qquad \text{par la question 4.c}$$

Donc par la question 4.d on obtient bien $C^2 = B^1 = B$. Ainsi, en posant

$$\boxed{C = B^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a bien } C^2 = B.}$$

Cependant,

$$\boxed{\text{la matrice } C \text{ n'est pas unique.}}$$

En effet, on observe que $-C \neq C$ et pourtant $(-C)^2 = C^2 = B$.

(b) Posons $D = PCP^{-1}$. Alors, $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} D^2 = \left(PCP^{-1}\right)^2 = PCP^{-1}PCP = PC^2P^{-1} &= PBP^{-1} && \text{par la question précédente} \\ &= A && \text{par la question 1.f} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{D = PCP^{-1} \text{ vérifie } D^2 = A.}$$

Exercice 2 : Probabilités

Cet exercice comporte trois parties. Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

Un jeu consiste à lancer un ballon dans un panier. On suppose que la probabilité de réussir le panier est $p \in]0;1[$ et que les lancers sont indépendants. On note $q = 1 - p$.

Partie 1 : Etude du jeu de lancer

1. On note T le nombre de lancers nécessaires pour réussir un panier pour la première fois. On note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k la variable aléatoire valant 1 si le panier k est réussi et 0 sinon.

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Précisons la loi de X_k. On observe que l'univers image $X_k(\Omega) = \{0; 1\}$. Donc X_k suit nécessairement une loi de Bernoulli. Son paramètre vaut $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$. Conclusion,

   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad X_k \sim \mathscr{B}(p)\,.}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimons $(T = n)$ à l'aide des X_k. L'évènement $(T = n)$ correspond à l'évènement le premier panier est obtenu au lancer n. Donc les $n - 1$ premiers lancers échouent tandis que le lancer n réussi. Ainsi,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (T = n) = (X_1 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1)\,.}$$

   (c) Déterminons la loi de T. Il est possible de réussir un panier dès le premier lancer comme il est possible d'échouer durant $n - 1$ lancer et de réussir son n-ième lancer pour n'importe quel n. Donc l'univers image de T est $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. De plus par la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$,

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = n) &= \mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1)\\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = 0) \times \mathbb{P}(X_n = 1) \qquad \text{car les } X_i \text{ sont indépendants}\\ &= (1-p)^{n-1}\,p \qquad \text{car } X_i \sim \mathscr{B}(p).\end{aligned}$$

   Le résultat reste vrai si $n = 1$. Conclusion,

   $$\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T = n) = p\,(1-p)^{n-1}\,.}$$

   On appelle cette loi, la loi géométrique de paramètre p, cf cours de deuxième année.

2. On effectue une infinité de lancers. Calculons la probabilité de réussir au moins un panier. La question est bizarre, puisque T est une variable aléatoire, la somme des issues fait forcément 1... ou alors il aurait fallu définir une valeur de T lorsque l'on échoue infiniment. Calculons malgré tout. Notons A l'évènement « réussir au moins un panier ». Pour réussir au moins un panier, il faut avoir réussi un premier panier au premier lancer ou au deuxième ou au troisième etc. On a donc

   $$A = (T < \infty) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} (T = n)\,.$$

   L'union étant disjointe, on a

   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n)\,.$$

   Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{P}(T = n) = p\,(1-p)^{n-1}$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est une série géométrique de raison $1 - p$ et $|1 - p| = 1 - p < 1$. Donc la série converge et

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = p \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} = p \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n = p \times \frac{1}{1 - (1-p)} = p \times \frac{1}{p} = 1.$$

   Ainsi,

   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(T < \infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\text{la probabilité de réussir au moins un panier est de 1.}}$$

3. L'organisateur du jeu ne connait pas la valeur de p et souhaite en connaître une valeur apporchée. Pour cela il observe $N \in \mathbb{N}^*$ lancers et note le nombre S_N de paniers réussis.

   (a) Précisons la loi de S_N. On effectue une série d'expériences de Bernoulli (deux issues : marquer ou non un panier) de même paramètre p et de façon indépendante (lancers indépendants) et ce, pendant N lancers. Conclusion,
$$\boxed{S_N \sim \mathscr{B}(N, p)\,.}$$

   (b) Soit $h : p \mapsto p(1-p) = p - p^2$. La fonction h est bien définie et même dérivable sur $[0;1]$ et
$$\forall p \in [0;1]\,, \quad h'(p) = 1 - 2p.$$
   Donc pour $p \in [0;1]$, $h'(p) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 1 \geqslant 2p \;\Leftrightarrow\; p \leqslant \frac{1}{2}$. Or $h(0) = h(1) = 0$ et $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Ainsi,

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$h'(p)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

   D'où pour tout $p \in [0;1]$, $h(p) \leqslant \frac{1}{4}$. Conclusion,
$$\boxed{\forall p \in \,]0;1[\,, \quad p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}.}$$

   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4N\,\varepsilon^2}$. Cela sent Tcheby. Puisque $S_N \sim \mathscr{B}(N, p)$, alors $\mathbb{E}(S_N) = Np$. Donc par linéarité, $\mathbb{E}\left(\frac{S_N}{N}\right) = \frac{\mathbb{E}(S_N)}{N} = \frac{Np}{N} = p$. Dès lors, par l'inégalité de Bieaymé-Tchebychev,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - \mathbb{E}\left(\frac{S_N}{N}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) &\leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\frac{S_N}{N}\right)}{\varepsilon^2}\\
&= \frac{\mathbb{V}(S_N)}{N^2\,\varepsilon^2} \qquad \text{car la variance est quadratique}\\
&= \frac{Np(1-p)}{N^2\,\varepsilon^2} \qquad \text{car } S_N \sim \mathscr{B}(N,p)\\
&\leqslant \frac{1}{4N\,\varepsilon^2} \qquad \text{par la question précédente.}
\end{aligned}$$
   Conclusion,
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4N\,\varepsilon^2}.}$$

Partie 2 : Un deuxième jeu

Le joueur met une pièce de 1 euro dans un sac à chaque lancer du ballon. Une fois le panier réussi, l'organisateur organise un deuxième jeu :

- L'organisateur enlève une pièce de 1 euro, qu'il garde pour lui, et la remplace par une pièce noire qui donne droit à $M \geqslant 2$ euros.
- Le joueur tire une pièce du sac.

- L'organisateur conserve les autres pièces du sac.

On rappelle que la variable T a été définie à la question 1.

4. On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}^*$ et l'évènement $(T = n)$ est réalisé : il y a donc n pièces dans le sac : $n-1$ pièces de 1 euro et la pièce noire.

   On note G_n la variable aléatoire égale au gain, éventuellement négatif, de l'organisateur.

   (a) Justifions que $G_n(\Omega) = \{n - M, n-1\}$ puis donnons la loi de G_n. Lorsque $(T = n)$ est réalisé, le jeu possède deux issues distinctes :

   - le joueur tire la pièce noire. Dans ce cas, l'organisateur a investi $M-1$ euros (car il a récupéré une pièce de 1 euro en échange de sa pièce noire) et récupéré à la fin les $n-1$ pièce de 1 euro. Au total son gain est dans ce cas de $G_n = n - 1 - (M-1) = n - M$.
   - second cas, le joueur tire une pièce à 1 euro. L'organisateur a toujours investi $M-1$ euros mais récupère cette fois $n-2$ pièces à 1 euro et la pièce noire. Son gain est alors de $G_n = n - 2 + M - (M-1) = n - 1$.

   On obtient donc bien $G_n(\Omega) = \{n - M, n-1\}$. Donnons maintenant la loi de G_n i.e. les probabilités de chaque issue. Pour réaliser le premier cas, il faut que le joueur obtienne la pièce noire. Le tirage étant uniforme parmi les n pièces possibles, on a $\mathbb{P}(G_n = n - M) = \frac{1}{n}$. De même (ou en tant qu'évènement complémentaire) $\mathbb{P}(G_n = n-1) = \frac{n-1}{n}$. Conclusion,

$$\boxed{G_n(\Omega) = \{n - M, n-1\}, \quad \mathbb{P}(G_n = n - M) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(G_n = n-1) = \frac{n-1}{n}.}$$

   (b) Calculons l'espérance de G_n. Par définition et la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G_n) &= (n - M)\,\mathbb{P}(G_n = n - M) + (n-1)\,\mathbb{P}(G_n = n-1)\\ &= \frac{n-M}{n} + \frac{(n-1)^2}{n}\\ &= \frac{n^2 - n + 1 - M}{n}.\end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(G_n) = \frac{n^2 - n + 1 - M}{n}.}$$

5. Déterminons la nature et la somme totale si possible de $\sum_{n \geqslant 1} n x^{n-1}$.

   Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n x^{n-1}$. Premier cas, $-1 < x < 1$. Alors, par croissance comparée

$$n^2 u_n = n^3 x^{n-1} n \underset{\longrightarrow}{\to +\infty} 0.$$

   Autrement dit,

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   Or $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge absolument et donc converge.

Deuxième cas, $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ diverge grossièrement et donc diverge. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} n x^{n-1} \text{ converge si et seulement si } x \in \left]-1;1\right[.}$$

Calculons maintenant sa somme totale sur $]-1;1[$. Posons pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1;1[$,

$$A_N(x) = \sum_{n=1}^{N} n x^{n-1}.$$

On observe qu'une primitive de A_N est donnée sur $]-1,1[$ par

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \quad B_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n.$$

On reconnait une somme géométrique de raison $x \in]-1;1[$. Donc

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \quad B_N(x) = x \frac{1 - x^N}{1 - x} = \frac{x - x^{N+1}}{1 - x}$$

Donc

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-1;1\right[, \quad A_N(x) = B_N'(x) &= \frac{\left(1 - (N+1)\, x^N\right)(1 - x) - x\left(1 - x^N\right)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{\left(1 - (N+1)\, x^N\right)(1 - x) + x\left(1 - x^N\right)}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on a, par croissance comparée, $(N+1)\, x^N \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $x^N \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{(1-x) + x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]-1;1\right[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.}$$

On admet dans la suite que $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{x^{n-1}}{n}$ converge sur $[-1;1[$ et

$$\forall x \in \left[-1;1\right[\setminus \{0\}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

On pourra utiliser ces résultats dans les calculs des questions suivantes.

6. On note A l'évènement « tirer la pièce noire ».

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimons $\mathbb{P}_{(T=n)}(A)$.
   Si $(T = n)$ est réalisé, cela signifie que le sac contient $n-1$ pièces de 1 euros et la pièce noire. Le tirage étant uniforme parmi toutes les pièces, on obtient directement,

$$\boxed{\mathbb{P}_{(T=n)}(A) = \frac{1}{n}.}$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(A)$. Puisque $(T=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A \mid T=n)\,\mathbb{P}(T=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\mathbb{P}(T=n) \qquad \text{par la question précédente}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}p(1-p)^{n-1} \qquad \text{par la question 1.c}\\ &= p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}.\end{aligned}$$

Posons $x=1-p\in\,]0;1[\,\subset\,]-1;1[$. Alors, par le résultat donné en question 5., la série converge bien et on obtient

$$\mathbb{P}(A) = p\frac{\ln(p)}{1-p}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{p}{q}\ln\left(\frac{1}{p}\right).}$$

7. On note G la variable aléatoire égale au gain, éventuellement négatif, de l'organisateur après ce deuxième jeu.

(a) Puisque $(T=n)_{n\geqslant 1}$ forme un système complet d'évènements, on sait qu'un et un seul des évènements $(T=n)$ et réalisé. Conditionnellement à cet évènement, on a $G=G_n$. Donc par la question 4.a G peut prendre les valeurs $n-M$ et $n-1$. Ceci est vrai pour tout $n\geqslant 1$ et ce sont les seules valeurs possibles de G. Donc

$$G(\Omega) = \{n-M, n\in\mathbb{N}^*\}\cup\{n-1, n\in\mathbb{N}^*\} = [\![1-M;+\infty[\![\cup[\![0;+\infty[\![.$$

Or $M\geqslant 2$ donc $1-M\leqslant -1$ Conclusion,

$$\boxed{G(\Omega) = \{k\in\mathbb{Z},\ k\geqslant 1-M\}.}$$

(b) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in G(\Omega)$. Déterminons $\mathbb{P}_{(T=n)}(G=k)$.
Sachant $(T=n)$ réalisé, le gain G de l'organisateur est alors donné par G_n : $G=G_n$. On obtient donc

$$\mathbb{P}_{(T=n)}(G=k) = \mathbb{P}_{(T=n)}(G_n=k) = \mathbb{P}(G_n=k).$$

Conclusion, par la question 4.a

$$\boxed{\mathbb{P}_{(T=n)}(G=k) = \begin{cases}\frac{n-1}{n} & \text{si } k=n-1\\ \frac{1}{n} & \text{si } k=n-M\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}}$$

(c) Déduisons-en la loi de G. Soit $k\in G(\Omega)$. Puisque $(T=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}_{(T=n)}(G=k)\,\mathbb{P}(T=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}_{(T=n)}(G=k)\,p(1-p)^{n-1} \qquad \text{par la question 1.c.}\end{aligned}$$

Premier cas, $1-M \leqslant k < 0$. Alors, k ne pourra pas être égal à $n-1$ et par la question précédente, $\mathbb{P}_{(T=n)}(G=k)$ sera non nul uniquement pour $k = n-M$ i.e. $n = k+M$. On obtient donc dans ce cas,

$$\mathbb{P}(G=k) = \frac{1}{k+M} p(1-p)^{k+M-1} = \frac{1}{k+M} pq^{k+M-1}.$$

Deuxième cas, $k \geqslant 0$, alors $\mathbb{P}_{(T=n)}(G=k)$ sera non nul pour $k = n-M$ i.e. $n = k+M$ et pour $k = n-1$ i.e. $n = k+1$. On obtient dans ce cas, toujours par la question précédente,

$$\mathbb{P}(G=k) = \frac{1}{k+M} pq^{k+M-1} + \frac{k+1-1}{k+1} pq^{k}.$$

Conclusion, la loi de G est donnée par $G(\Omega) = \{k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 1-M\}$ et

$$\boxed{\forall k \in G(\Omega), \quad \mathbb{P}(G=k) = \begin{cases} \dfrac{k}{k+1} pq^{k} + \dfrac{1}{k+M} pq^{k+M-1} & \text{si } k \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{k+M} pq^{k+M-1} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

8. Calcul de l'espérance de G.

   (a) Montrons que la série de terme général $u_n = \mathbb{E}(G_n)\mathbb{P}(T=n)$ converge.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par ce qui précède, on a

   $$u_n = \frac{n^2 - n + 1 - M}{n} pq^{n-1}.$$

   Or $q \in]-1;1[$ donc

   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} npq^{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge absolument en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. La convergence absolue impliquant la convergence, on conclut que

   $$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{E}(G_n)\mathbb{P}(T=n) \text{ converge.}}$$

   (b) On admet qu'alors G admet une espérance et

   $$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(G_n)\mathbb{P}(T=n).$$

   Calculons $\mathbb{E}(G)$.
   Par les questions 1.c et 4.b on a

   $$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - n + 1 - M}{n} pq^{n-1}.$$

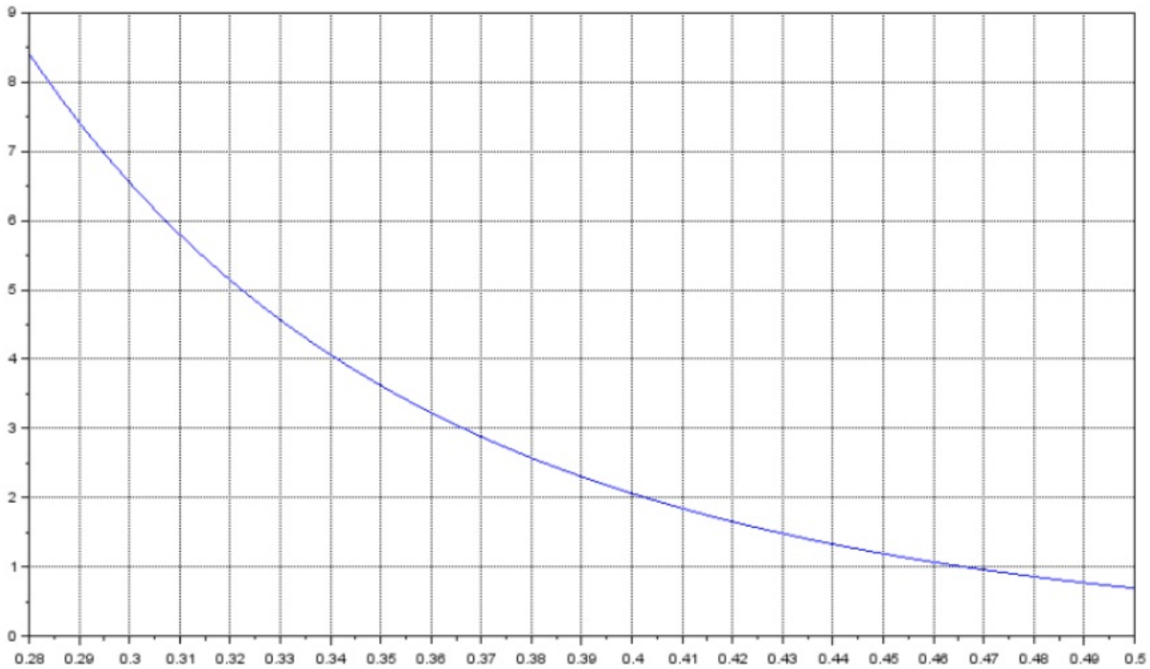
   De plus par la question 5., $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{q^{n-1}}{n}$ converge car $q \in]-1;1[$. De même $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} q^{n-1}$ converge en tant que série géométrique de raison $q \in]-1;1[$. Il est donc possible de séparer la somme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G) &= p\left(\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} + (1-M)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{n-1}}{n}\right) \\
&= p\left(\frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{1-q} - (1-M)\frac{\ln(1-q)}{q}\right) \\
&= \frac{1}{p} - 1 + (1-M)\frac{p}{q}\ln(p).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(G) = \frac{1-p}{p} + (M-1)\frac{p}{1-p}\ln(p).}$$

9. Voici un extrait de la courbe représentative de la fonction $\psi : p \mapsto \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)}$.



On dira que le jeu est rentable pour l'organisateur lorsque son espérance de gain est positive. Dans les questions suivantes, on justifiera les résultats obtenus.

(a) Montrons que $\mathbb{E}(G) \geqslant 0 \implies \psi(p) \geqslant M-1$.
Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-p}{p} + (M-1)\frac{p}{1-p}\ln(p) \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1-p}{p} \geqslant -(M-1)\frac{p}{1-p}\ln(p) = (M-1)\frac{p}{1-p}\ln\left(\frac{1}{p}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)} \geqslant M-1 \qquad \text{car } \frac{p}{1-p}\ln\left(\frac{1}{p}\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \psi(p) \geqslant M-1.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(G) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi(p) \geqslant M-1.}$$

(b) L'organisateur sait que $p = 0,3$. Cherchons les valeurs de M pour que le jeu soit rentable. Le jeu est rentable pour l'organisateur si et seulement si $\mathbb{E}(G) \geqslant 0$,donc par la question précédente si et seulement si $\psi(p) \geqslant M - 1$. Puisque $p = 0,3$, cela équivaut encore à

$$M \leqslant \psi(0,3) + 1.$$

Ce qui nous donne environ par lecture graphique *(c'est des maths ça ? ? ?)*

$$M \leqslant 6,5 + 1 = 7,5.$$

Conclusion, les valeurs de M pour que le jeu soit rentable sont

$$\boxed{M \in [2; 7,5].}$$

(c) On suppose que $M = 8$. Cherchons la valeur maximale de p pour que le jeu reste rentable. Par la question 9.a on a

$$\mathbb{E}(G) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \psi(p) \geqslant M - 1 = 7.$$

Par lecture graphique, on obtient environ *(beurk)*

$$p \leqslant 0,295$$

Conclusion, la valeur maximale de p pour que le jeu reste rentable est d'environ

$$\boxed{p_{max} = 0,295.}$$

(d) Cherchons les valeurs de p pour lequel le jeu ne peut pas être rentable. Le jeu ne peut pas être rentable si pour toute valeur de $M \geqslant 2$, on aura $\psi(p) < M - 1$. Donc si

$$\psi(p) < \min_{M \geqslant 2} (M - 1) = 1.$$

Donc par lecture graphique pour environ

$$\boxed{p \geqslant 0,465.}$$

Partie 3 : Une autre estimation du paramètre

La partie 1 donne un résultat permettant d'approcher la valeur de p par $\frac{S_N}{N}$. On prouve dans cette partie un résultat similaire en utilisant une méthode dite de grandes déviations. On suppose que $p \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$. Pour $\lambda \geqslant 0$, on pose

$$h(\lambda) = (1-p)\,\mathrm{e}^{-\lambda p} + p\,\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} \quad \text{et} \quad g(\lambda) = \ln h(\lambda).$$

On admet que pour tout $\lambda \geqslant 0$, on a $g(\lambda) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, et on pose $S_N = X_1 + \cdots + X_N$ et $\lambda \geqslant 0$.

10. (a) Montrons que $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X_1 - p)}\right) = \mathrm{e}^{g(\lambda)}$.
Par le théorème de transfert, puisque $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$,

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X_1-p)}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\,\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathrm{e}^{\lambda(1-p)}\,\mathbb{P}(X_1 = 1). \qquad = \mathrm{e}^{-\lambda p}(1-p) + \mathrm{e}^{\lambda(1-p)}\,p$$
$$= h(\lambda).$$

En tant que somme de deux termes strictement positifs, on observe que $h(\lambda)$ est strictement positif. Donc

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X_1-p)}\right) = \mathrm{e}^{\ln(h(\lambda))} = \mathrm{e}^{g(\lambda)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X_1-p)}\right) = \mathrm{e}^{g(\lambda)}.}$$

(b) Montrons que $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N-Np)}\right)=\mathrm{e}^{\frac{N}{2}\lambda^2}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N-Np)}\right)&=\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda\left(\sum_{k=1}^N X_k-Np\right)}\right)\\&=\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda\left(\sum_{k=1}^N (X_k-p)\right)}\right)\\&=\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^N \mathrm{e}^{\lambda(X_k-p)}\right).\end{aligned}$$

Puisque les X_k sont indépendantes, alors les variables aléatoires $Y_k=\mathrm{e}^{\lambda(X_k-p)}$ sont aussi indépendantes entre elles. Donc

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N-Np)}\right)=\prod_{k=1}^N \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X_k-p)}\right).$$

De plus les X_k sont de même loi. Donc les $Y_k=\mathrm{e}^{\lambda(X_k-p)}$ aussi sont toutes de même loi que $\mathrm{e}^{\lambda(X_1-p)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N-Np)}\right)=\left(\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X_1-p)}\right)\right)^N&=\left(\mathrm{e}^{g(\lambda)}\right)^N &&\text{par la question précédente}\\&=\mathrm{e}^{Ng(\lambda)}.\end{aligned}$$

Or on sait que $g(\lambda)\leqslant\frac{\lambda^2}{2}$. Donc par croissance de la fonction exponentielle,

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N-Np)}\right)=\mathrm{e}^{Ng(\lambda)}\leqslant\mathrm{e}^{\frac{N}{2}\lambda^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N-Np)}\right)\leqslant\mathrm{e}^{\frac{N}{2}\lambda^2}.}$$

(c) Soit $\varepsilon>0$ et $\lambda>0$. Par l'inégalité de Markov, montrons que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N}-p\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\exp\left(-N\lambda\varepsilon+\frac{N}{2}\lambda^2\right).$$

On commence par observer que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N}-p\geqslant\varepsilon\right)&=\mathbb{P}\left(S_N-Np\geqslant N\varepsilon\right) &&\text{car } N>0\\&=\mathbb{P}\left(\lambda(S_N-Np)\geqslant\lambda N\varepsilon\right) &&\text{car } \lambda>0\\&=\mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N-Np)}\geqslant\mathrm{e}^{\lambda N\varepsilon}\right) &&\text{par croissance de la fonction exponentielle}\\&=\frac{\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_N-Np)}\right)}{\mathrm{e}^{\lambda N\varepsilon}} &&\substack{\text{par l'inégalité de Markov}\\ \text{car } \mathrm{e}^{\lambda(S_N-Np)}>0 \text{ et } \mathrm{e}^{\lambda N\varepsilon}>0}\\&=\leqslant\mathrm{e}^{-\lambda N\varepsilon}\mathrm{e}^{\frac{N}{2}\lambda^2} &&\text{par la question précédente et } \mathrm{e}^{-\lambda N\varepsilon}>0.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \forall\lambda>0,\quad \mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N}-p\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\mathrm{e}^{-\lambda N\varepsilon+\frac{N}{2}\lambda^2}.}$$

(d) Montrons que $\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N}-p\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\exp\left(-\frac{N}{2}\varepsilon^2\right)$.
Posons $\lambda=\varepsilon>0$. Alors, par la question précédente, on obtient,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N}-p\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\mathrm{e}^{-N\varepsilon^2+\frac{N}{2}\varepsilon^2}=\mathrm{e}^{-\frac{N}{2}\varepsilon^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\quad \mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N}-p\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{N}{2}\varepsilon^2}.}$$

(e) On admet que l'on pourrait montrer de manière similaire que

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_N}{N}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\exp\left(-\frac{N}{2}\,\varepsilon^2\right).$$

On souhaite évaluer l'erreur faite en prenant $\frac{S_N}{N}$ comme valeur approchée de p.
La valeur p est une valeur théorique possiblement inconnue, il est alors possible d'approcher (loi des grands nombres) cette valeur théorique par une réalisation de $\frac{S_N}{N}$ (valeur empirique). La probabilité de commettre une erreur plus grande que ε est alors contrôlée ici par $\exp\left(-\frac{N}{2}\,\varepsilon^2\right)$; terme qui tend bien vers 0 quand $N\to+\infty$. En connaissant N (nombre de lancers) et ε (précision exigée) on est capable de majorer la probabilité de commettre une erreur plus grand que ε. Cette méthode des grandes déviations est plus intéressante que la précédente majoration si et seulement si le majorant est plus petit que celui de la partie 1 :

$$\boxed{\exp\left(-\frac{N}{2}\,\varepsilon^2\right)<\frac{1}{4N\,\varepsilon^2}.}$$

Fin du corrigé.