Devoir de Révision PTSI
d'après Banque PT - Maths A - 2024

Les parties en bleu avec astérisque ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Le sujet est composé de 2 exercices indépendants.

Problème I : Probabilités

Ce problème est composé de 3 parties indépendantes, chacune d'elle étant l'étude d'un tirage différent dans un paquet de bonbons effectué par deux enfants Alice et Cyril.
Dans l'ensemble du problème :

- On dispose d'un paquet de bonbons qui contient uniquement des bonbons à la menthe et des nougats.
- On suppose que l'emballage des bonbons les rend indiscernables.
- Alice n'aime que les bonbons à la menthe et Cyril que les nougats.

Par ailleurs, on pourra utiliser les notations suivantes : pour tout entier $n \geqslant 1$,

- M_n est l'évènement « le n-ième bonbon tiré est un bonbon à la menthe » ;
- N_n est l'évènement « le n-ième bonbon tiré est un nougat ».

Partie A
Dans cette partie, le paquet de bonbons contient 10 nougats et 10 bonbons à la menthe. Alice tire 1 bonbon dans le paquet et le garde dans sa main puis Cyril fait de même.
On note :

- X_A la variable aléatoire égale à 1 si Alice tire un bonbon à la menthe et égale à 0 si Alice tire un nougat.
- X_C la variable aléatoire égale à 1 si Cyril tire un nougat et égale à 0 si Cyril tire un bonbon à la menthe.

1. (a) Quelle est la loi de X_A ? On donnera son nom et la valeur du ou des paramètres.
   (b) Donner les valeurs de l'espérance et la variance de X_A.
2. (a) Déterminer $P\left(X_A = 0, X_C = 0\right)$.
   (b) Déterminer la loi conjointe d couple (X_A, X_C).
3. En déduire la loi de X_C. Une justification est attendue.
4. (a) Vérifier que la covariance $\operatorname{Cov}\left(X_A, X_C\right)$ de X_A et X_C vaut $\frac{1}{76}$.
   (b) Les variables aléatoires X_A et X_C sont-elles indépendantes ?

Lorsqu'un enfant a tiré un bonbon qu'il n'aime pas, il le donne à l'autre enfant.
On note alors :

- Y_A la variable aléatoire égale au nombre de bonbons à la menthe détenus par Alice après les dons éventuels ;

- Y_C la variable aléatoire égale au nombre de nougats détenus par Cyril après les dons éventuels.

5. Justifier que l'univers image $Y_A(\Omega)$ de Y_A es égal à $\{0;1;2\}$.
6. (a) Quelle est la loi de $Y = Y_A + Y_C$?
   (b) En déduire que la covariance $\mathrm{Cov}(Y, Y_A)$ de Y et Y_A est nulle.
   (c) Démontrer que $\mathrm{Cov}(Y, Y_A) = V(Y_A) + \mathrm{Cov}(Y_A, Y_C)$, où $\mathrm{Cov}(Y_A, Y_C)$ est la covariance de Y_A et Y_C et $V(Y_A)$ la variance de Y_A.
   (d) En déduire le signe de $\mathrm{Cov}(Y_A, Y_C)$.
7. Justifier que $Y_A = 1 + X_A - X_C$.
8. En déduire l'espérance de Y_A et démontrer que sa variance vaut $\frac{9}{19}$.
9. A l'aide des résultats de la question précédente, justifier que la loi de Y_A n'est pas une loi binomiale.

Partie B
Dans cette partie, le paquet de bonbons contient 10 nougats et 6 bonbons à la menthe. Alice tire dans le paquet de bonbons 1 par 1. Si c'est un nougat, elle le remet dans le paquet. Si c'est un bonbon à la menthe, elle le mange. Les tirages s'arrêtent lorsque Alice a mangé deux bonbons.
On note :

- Z_1 la variable aléatoire égale au nombre de bonbons tirés au moment où Alice mange son premier bonbon ;
- Z_2 la variable aléatoire égale au nombre de bonbons tirés après qu'Alice a mangé le premier bonbon et au moment où Alice mange son deuxième bonbon.
- G_1 la fonction génératrice de Z_1.
- G_2 la fonction génératrice de Z_2.
- D_1 le domaine de définition de G_1 et D_2 celui de G_2.

On admet que les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont indépendantes.
* On admettra dans toute cette partie que lorsqu'une variable aléatoire X a un univers image infini : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors toutes les formules/définitions du cours sur l'espérance, la variance, la fonction génératrice et le théorème de transfert restent vrais en remplaçant les sommes finies par des sommes totales $\sum_{k=1}^{+\infty} \dots$.
Ceci EN CAS DE CONVERGENCE uniquement de la série numérique associée.

0. Soit $p \in \mathbb{R}$.
   (a) * Discuter, suivant la valeur de p, la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} np^{n-1}$.
   (b) * Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} kp^{k-1}$. A l'aide d'un glissement d'indice, déterminer la valeur S_n en fonction de p et n.
   (c) * En déduire, lorsque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} np^{n-1}$ converge, la valeur de la somme totale associée $\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1}$.

1. (a) i. * Déterminer $Z_1(\Omega)$ l'univers image de Z_1.
   ii. * Pour k dans $Z_1(\Omega)$, exprimer $(Z_1 = k)$ en fonction d'évènements M_k et N_k (définis en introduction) bien choisis.

iii. * En déduire $P\left(Z_1 = k\right)$.

(b) Donner l'espérance et la variance de Z_1.

(c) Justifier que pour tout $t \in D_1$, $G_1(t) = \dfrac{3}{5}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\dfrac{5}{8}t\right)^k$ et déterminer D_1.

(d) Déterminer pour tout $t \in D_1$, l'expression de $G_1(t)$ à l'aide des fonctions usuelles.

(e) * Déterminer le développement limité à l'ordre n de G_1 en 0.

(f) Déterminer la valeur de $G_1^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Préciser $G_1(0)$.

2. Donner, sans les justifier la loi de Z_2, son espérance et sa variance, D_2, $G_2(0)$ et $G_2^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3. On pose $Z = Z_1 + Z_2$ et on note G la fonction génératrice de Z.

(a) Que représente Z ? Quelle est son espérance ?

(b) Donner l'univers image de $Z\left(\Omega\right)$ de Z.

(c) Exprimer pour tout $t \in D_1 \cap D_2$, $G(t)$ en fonction de $G_1(t)$ et $G_2(t)$.

(d) A l'aide de la formule de Leibniz, exprimer pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $G^{(n)}(0)$ en fonction de $G_1^{(k)}(0)$ et $G_2^{(k)}(0)$ pour des valeurs non nulles de k bien choisies.

(e) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $G^{(n)}(0) = 3n!\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\right)$.

(f) En déduire $P\left(Z = n\right)$ pour tout $n \in Z\left(\Omega\right)$.

(g) En utilisant la définition de l'espérance, retrouver la valeur de l'espérance de Z.

Partie C

Dans cette partie, la proportion des bonbons à la menthe dans le paquet est notée a et celle des nougats est notée c avec $(a, c) \in]0; 1[^2$.
Le tirage des bonbons dans le paquet répond au protocole suivant :

- Les enfants tirent à tour de rôle un bonbon dans le paquet.
- Lorsqu'un enfant tire un bonbon qu'il aime, il le mange, sinon il le remet dans le paquet.
- Les tirages s'arrêtent dès qu'un enfant a mangé un bonbon.
- Cyril effectue le premier tirage.

On note B la variable aléatoire égale à 1 si c'est Cyril qui a mangé un bonbon, égale à 0 si c'est Alice qui a mangé un bonbon et égale à -1 dans les autres cas.

1. Justifier que $a + c = 1$.

2. Soit n un entier naturel non nul. On note C_n l'évènement : « Cyril a mangé un nougat au n-ième tirage ».

(a) Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer C_{2p+1} en fonction d'évènements M_k et N_k (définis en introduction) bien choisis.

(b) En déduire $P\left(C_{2p+1}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

(c) Que peut-on dire de C_{2p} et $P\left(C_{2p}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$?

(d) Etablir à l'aide des questions précédentes que $P\left(B = 1\right) = \frac{c}{1-ac}$.

(e) Démontrer de même que $P\left(B = 0\right) = \frac{a^2}{1-ac}$.

(f) En déduire la valeur de $P(B=-1)$. Interpréter ce résultat.

(g) Est-il possible de posséder un paquet de bonbons tel que Alice et Cyril aient autant de chance l'un que l'autre de manger un bonbon ?

Problème II : Algèbre

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit φ l'application définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$ par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2, \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k).$$

On considère également les polynômes $L_p(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{3} \frac{X-k}{p-k}$ pour $p \in \{0;1;2;1\}$.

1. (a) Vérifier que $L_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3)$.
   (b) Ecrire de même $L_1(X)$, $L_2(X)$ et $L_3(X)$.
   (c) Déterminer les valeurs de $L_p(k)$ pour tout $(p,k) \in [\![0;3]\!]^2$.

2. (a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
   On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.
   (b) Vérifier que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.
   (c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. * Démontrer que
   $$Q = \sum_{k=0}^{3} \varphi(Q, L_k) L_k.$$
   En déduire en fonction de Q, les coordonnées de Q dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3).

3. (a) * Calculer $E_1 = \frac{1}{\|1\|}$.
   (b) * Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V_1 = X - \lambda E_1$. Déterminer λ pour que V_1 soit orthogonal à E_1.
   (c) * Calculer $E_2 = \frac{V_1}{\|V_1\|}$.
   (d) * Montrer que (E_1, E_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère désormais 6 réels a, b, y_0, y_1, y_2 et y_3 et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$. Pour tout $p \in [\![0;3]\!]$, on note M_p le point de coordonnées (p, y_p), N_p le point de $\mathcal{D}$ dont l'abscisse est p et d_p la longueur du segment $[M_pN_p]$.

On pose $\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} d_p^2$.

L'objectif est de déterminer les valeurs de a et b (si elles existent) pour lesquelles $\delta(a,b)$ est minimale.

4. Faire, sur la copie, un schéma qui illustre les données précédentes.

5. Vérifier que $\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} (y_p - ap - b)^2$.

6. Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ dont le graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

   On pourra utiliser les polynômes L_p pour $p \in [\![0;3]\!]$.

7. Démontrer que $\delta(a,b) = \|Q - H\|^2$ où $H = aX + b$.

8. En évoquant la distance d'un vecteur à un espace vectoriel bien choisi, en déduire l'existence d'un minimum pour δ et que celui-ci est atteint en un unique polynôme H_0.

   On précisera le lien entre Q et H_0.

Dans la suite du sujet, on pose $\overline{Y} = \sum_{p=0}^{3} y_p$ et $\overline{XY} = \sum_{k=0}^{3} p y_p$.

9. (a) * On pose $H_0 = \varphi(Q, E_1) E_1 + \varphi(Q, E_2) E_2$. Montrer que H_0 est le projeté orthogonal de Q sur $\mathbb{R}_1[X]$, autrement dit que $H_0 \in \mathbb{R}_1[X]$ et que $\overrightarrow{H_0 Q}$ est normal à tous les vecteurs de $\mathbb{R}_1[X]$.

   (b) Déterminer H_0 en fonction de $\overline{Y}$ et $\overline{XY}$.

10. (a) * Justifier que le système $\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial a}(a,b) = 0 \\ \frac{\partial \delta}{\partial b}(a,b) = 0 \end{cases}$ admet une unique solution que l'on déterminera en fonction de $\overline{Y}$ et $\overline{XY}$.

    (b) * Vérifier que les valeurs de a et b trouvées à la question précédente correspondent au minimum H_0 de δ.

Une application industrielle : Un processus industriel nécessite que l'on contrôle au cours du temps t, exprimé en heures, l'évolution de la concentration C d'un produit dans une cuve car le processus doit être interrompu lorsque la concentration du produit devient inférieure à $\frac{1}{12}$.
Des études montrent que cette concentration C évolue au court du temps en suivant une loi de la forme $C(t) = \frac{k}{t+c}$, les valeurs des réels k et c étant inconnues.
On souhaite obtenir expérimentalement des valeurs de k et c.
Pour cela, on effectue des mesures qui ont donné les résultats suivants :

t	0	1	2	3
$C(t)$	1	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$

11. (a) Placer dans un repère orthogonal les points $M(t)$ de coordonnées $\left(t, \dfrac{1}{C(t)}\right)$ pour $t = 0$, 1, 2 et 3.

    ~~On utilisera la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet.~~

    (b) Comment ces quatre points devraient-ils être positionnés ? Est-ce le cas ? Comment peut-on l'expliquer ?

    (c) Expliquer en quoi les questions 6 à 8 permettent en théorie de déterminer les valeurs de k et c.

    (d) Déterminer les valeurs « expérimentales » que l'on obtient alors pour k et c.

    (e) Au bout de combien de temps, l'industriel doit-il interrompre le processus ? On arrondira le résultat à l'entier le plus proche.

Fin de l'épreuve