Corrigé - Banque PT - Maths B - 2023
Version pour juniors

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Le sujet est composé de 4 parties. La partie 4 est indépendante du reste du sujet.

Première Partie.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit r l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice R.

   (a) Soit C_1, C_2, C_3 les trois vecteurs colonnes de R. Montrons que (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

   On peut naturellement procéder de différentes façons, en voici une.

   - Calculons le déterminant de R. On a les égalités suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\det(R) &= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} C_2 \to C_2 - 2C_1 \\ C_3 \to C_3 + 2C_1 \end{array} \\
&= -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} C_2 \to -\frac{1}{3}C_2 \\ C_3 \to \frac{1}{3} \end{array} \\
&= -3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} && \text{en développant par rapport à } L_1 \\
&= -3(1-4) \\
&= 9.
\end{aligned}$$

     En particulier, $\det(R) \neq 0$ donc R est la matrice de passage entre deux bases, donc (C_1, C_2, C_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   - Par le point précédent, $\det(R) \geqslant 0$ donc la base (C_1, C_2, C_3) est directe.

- De plus,

$$\|C_1\| = \frac{1}{3}\left\|\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1$$
$$\|C_2\| = \frac{1}{3}\left\|\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+1+4} = 1$$
$$\|C_3\| = \frac{1}{3}\left\|\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1.$$

  Donc (C_1, C_2, C_3) est normée.
- Enfin,

$$\langle C_1, C_2\rangle = \frac{1}{9}\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}\right\rangle = \frac{1}{9}(2+2-4) = 0$$
$$\langle C_1, C_3\rangle = \frac{1}{9}\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}\right\rangle = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$$
$$\langle C_2, C_3\rangle = \frac{1}{9}\left\langle \begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}\right\rangle = \frac{1}{9}(-4+2+2) = 0.$$

  D'où (C_1, C_2, C_3) est orthogonale.

Conclusion,

$$\boxed{\text{La famille } (C_1, C_2, C_3) \text{ est une base orthonormée directe de } \mathbb{R}^3.}$$

(b) On admet alors que r est une rotation de l'espace d'axe dirigé par un vecteur $\overrightarrow{e_1}$ vérifiant $r(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}$ et d'angle θ défini par $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(R)$ et $\sin(\theta)$ de même signe que $\det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}, r(\overrightarrow{u}))$, pour $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque non colinéaire à $\overrightarrow{e_1}$.
Déterminons un vecteur $\overrightarrow{e_1}$ solution et un angle θ associé.
Soit (x, y, z) les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{e_1}$ dans la base canonique. On a les équivalences

suivantes, en notant $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
r\left(\overrightarrow{e_1}\right)=\overrightarrow{e_1} \quad & \Leftrightarrow \quad \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(r)\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(\overrightarrow{e_1}\right)=\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(\overrightarrow{e_1}\right)\\
& \Leftrightarrow \quad R\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\2&-2&-1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x+2y-2z=3x\\2x+y+2z=3y\\2x-2y-z=3z\end{cases}\\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases}-2x+2y-2z=0\\2x-2y+2z=0\\2x-2y-4z=0\end{cases}\\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x-y+z=0\\x-y+z=0\\x-y-2z=0\end{cases} \qquad \begin{array}{l}L_1\leftarrow -\frac{1}{2}L_1\\L_2\leftarrow \frac{1}{2}L_2\\L_3\leftarrow \frac{1}{2}L_3\end{array}\\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x-y+z=0\\-3z=0\end{cases} \qquad \begin{array}{l}L_1=L_2\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array}\\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x=y\\z=0\end{cases}
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{C}=\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et fixons $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$.
De plus, on sait que

$$\begin{aligned}
1+2\cos(\theta)=\operatorname{Tr}(R) \quad & \Leftrightarrow \quad 1+2\cos(\theta)=\frac{1}{3}(1+1-1)=\frac{1}{3}\\
& \Leftrightarrow \quad \cos(\theta)=-\frac{1}{3}\\
& \Leftrightarrow \quad \theta\equiv\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad \theta\equiv-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\ [2\pi].
\end{aligned}$$

On sait également que, pour le vecteur $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}$ par exemple, on a $\sin(\theta)$ de même signe que $\alpha=\det\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{u},r\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$. Or

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(r\left(\overrightarrow{u}\right)\right)=R\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(\overrightarrow{u}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\2&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\alpha&=\begin{vmatrix}1&1&1/3\\1&0&2/3\\0&0&2/3\end{vmatrix}\\
&=\frac{2}{3}\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à } L_3\\
&=-\frac{2}{3}\leqslant 0.
\end{aligned}$$

Donc $\sin(\theta) \leqslant 0$. Par suite,

$$\theta \equiv -\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \;[2\pi]\,.$$

Conclusion, on peut prendre

$$\boxed{\overrightarrow{e_1}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \theta = -\arccos\left(-\frac{1}{3}\right).}$$

2. Calculons $A_1 = RDR^{-1}$ et exprimons la en fonction de A. Commençons par le calcul de R^{-1}. On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{lll}
R = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -3 & 6\\ 0 & -6 & 3\end{pmatrix} & \begin{array}{l}L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} & L_1 \leftarrow 3L_1 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}L_2 \leftarrow -L_2\\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3\end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -2/3 & 2/3 & -1/3\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3\end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}5/3 & 4/3 & -2/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ -2/3 & 2/3 & -1/3\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ -2/3 & 2/3 & -1/3\end{pmatrix}.
\end{array}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ -2/3 & 2/3 & -1/3\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix} = I_3 \textit{ OK !}$$

Puisque $R \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, la matrice R est bien inversible et on a

$$R^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix} = R^T.$$

Le fait que $R^{-1} = R^T$ est une généralité des isométries que l'on utilisera directement sans calcul l'année prochaine.

On a donc les égalités entre matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
A_1 = RDR^{-1} &= R\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{A_1 = RDR^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}A.}$$

3. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A et f_1 celui associé à la matrice A_1.

   (a) Montrons que f_1 est la composée commutative d'une symétrie et d'une projection et déterminons leurs matrices.

   Puisque $A_1 = RDR^{-1}$, alors A_1 et D sont semblables et donc représentent le même endomorphisme f_1 mais dans des bases différentes (A_1 est la représentation dans la base canonique). On observe que la matrice D peut s'écrire

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   ou encore

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Posons $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc $D = PS = SP$. Posons également $S_1 = RSR^{-1}$, $P_1 = RPR^{-1}$, s_1 l'endomorphisme canoniquement associé à S_1 et p_1 celui canoniquement associé à P_1. On a

$$A_1 = RDR^{-1} = RPSR^{-1} = RPR^{-1}RSR^{-1} = P_1S_1.$$

   De même $A_1 = S_1P_1$. D'où $f_1 = s_1 \circ p_1 = p_1 \circ s_1$. Montrons que s_1 est une symétrie et p_1 une projection. On a

$$S_1^2 = RSR^{-1}RSR^{-1} = RS^2R^{-1} = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}R^{-1} = RI_3R = I_3.$$

   Donc $s_1 \circ s_1 = s_1$ et s_1 est bien une symétrie. De même, $P_1^2 = P_1$ donc $p_1 \circ p_1 = p_1$ et p_1 est bien un projecteur. Conclusion, f_1 est la composée commutative d'une symétrie s_1 et d'une projection

p_1 définies par

$$\boxed{S_1 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(s_1) = R\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}R^{-1} \quad \text{et} \quad P_1 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(p_1) = R\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}R^{-1}.}$$

(b) On note que $S_2 = R\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}R^{-1}$ vérifie aussi $S_2P_1 = P_1S_2 = A_1$ et $S_2^2 = I_3$. Donc en posant s_2 l'endomorphisme canoniquement associé à S_2, on obtient une autre symétrie solution. Conclusion,

$$\boxed{\text{la symétrie } s_1 \text{ n'est pas unique.}}$$

(c) Cherchons si s_1 est une symétrie **orthogonale** autrement dit si ses sous espaces vectoriels caractéristiques sont orthogonaux. Notons C_1, C_2, C_3 les trois vecteurs colonnes de R et $\mathscr{B} = (C_1, C_2, C_3)$ la base formée par ces trois colonnes. Par la question 1.a la base $\mathscr{B}$ est orthonormée directe. Soit $X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$SX = X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x = x\\ y = y\\ z = -z\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(S - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$. Ainsi, comme $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(s_1) = S_1$ et $S_1 = RSR^{-1}$, par la formule de changement de base, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s_1) = S$. D'où

$$\mathrm{Ker}\,(s_1 - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2).$$

De même,

$$\mathrm{Ker}\,(s_1 + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\,(C_3).$$

Donc s_1 est la symétrie par rapport au plan $\mathrm{Vect}\,(C_1, C_2)$ et parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}\,(C_3)$ Or (C_1, C_2, C_3) étant orthogonale, on en déduit que la droite $\mathrm{Vect}\,(C_3)$ est perpendiculaire au plan $\mathrm{Vect}\,(C_1, C_2)$. Conclusion,

$$\boxed{s_1 \text{ est une symétrie orthogonale.}}$$

4. (a) Montrons que A est diagonalisable. Par ce qui précède,

$$A = 3A_1 = 3RDR^{-1} = R\,(3D)\,R^{-1}.$$

Donc A est semblable à la matrice $3D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ qui est bien diagonale. Conclusion,

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

(b) Montrons que f est la composée de trois transformations simples.
Par la question précédente, la matrice $3D$ est la représentation matricielle de f dans la base $\mathscr{B} = (C_1, C_2, C_3)$. Or on a vu que $D = SP$. Posons $H_1 = 3I_3 = R\,(3I_3)\,R^{-1}$ et h_1 l'endomorphisme canoniquement associé. L'endomorphisme h est une homothétie de rapport 3 et on a donc

$$\boxed{f \text{ est la composée commutative d'une homothétie } h_1\text{, d'une symétrie } s_1 \text{ et d'une projection } p_1.}$$

(c) Montrons que $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice B et déterminons la valeur propre associée.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} &\Leftrightarrow \quad B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}3&2&-4\\-2&-1&2\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}-1=\lambda\\0=0\\-1=\lambda\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \lambda=-1.
\end{aligned}$$

Posons $\lambda=-1$, alors, on a bien $B\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ donc

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } B \text{ associé à la valeur propre } -1.}$$

(d) Montrons que Q est inversible.
Calculons son déterminant :

$$\begin{aligned}
\det(Q) &= \begin{vmatrix}0&1&1\\2&-1&0\\1&0&1\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}0&1&0\\2&-1&1\\1&0&1\end{vmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_2\\
&= -\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à } L_1\\
&= -1.
\end{aligned}$$

Donc $\det(Q) \neq 0$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la matrice } Q \text{ est inversible.}}$$

(e) Sans calculer Q^{-1}, montrons que $B = QDQ^{-1}$. Soit g l'endomorphisme canoniquement associé à B. Notons C_1', C_2' et C_3' les trois colonnes de B et $\mathscr{B}' = (C_1', C_2', C_3')$. Puisque Q est inversible, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par la formule de changement de base, on doit alors montrer que D est la représentation matricielle de B dans $\mathscr{B}'$. On a

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(g(C_1')) = BC_1' = \begin{pmatrix}3&2&-4\\-2&-1&2\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Donc $g\left(C_1'\right) = 0_{\mathbb{R}^3}$. De même,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(g\left(C_2'\right)\right) = BC_2' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donc $g\left(C_2'\right) = C_2'$. Enfin, par la question 4.c $g\left(C_3'\right) = -C_3'$. Par suite,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D.$$

Comme $Q = \operatorname{mat}\mathscr{C}\left(\mathscr{B}'\right)$, par la formule de changement de base

$$\boxed{B = QDQ^{-1}.}$$

(f) Montrons que A_1 et B sont semblables. Par les questions précédentes, on a

$$A_1 = RDR^{-1} = R\left(Q^{-1}BQ\right)R^{-1} = RQ^{-1}BQR^{-1} = RQ^{-1}B\left(RQ^{-1}\right)^{-1}.$$

Posons $T = RQ^{-1}$ qui est bien inversible en tant que produit de deux matrices inversibles et on a donc $A_1 = TBT^{-1}$. Conclusion,

$$\boxed{A_1 \text{ et } B \text{ sont semblables et } A_1 = RQ^{-1}B\left(RQ^{-1}\right)^{-1}.}$$

Deuxième Partie.

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on considère la fonction vectorielle $f_{a,b,c}$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t} \\ 2a - b\,\mathrm{e}^t \\ a + c\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

On note F l'ensemble des fonction $f_{a,b,c}$ lorsque (a,b,c) parcourt $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}_{a,b,c}$ la courbe correspondante à l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $f_{a,b,c}(t)$ quand t parcourt $\mathbb{R}$.
Enfin, les matrices B et Q sont celles qui ont été définies dans la première partie.

1. Démontrons que F est un espace vectoriel et déterminons sa base et sa dimension.

   Par définition,

$$\begin{aligned} F &= \left\{ f_{a,b,c} \in \mathscr{F}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3\right) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t} \\ 2a - b\,\mathrm{e}^t \\ a + c\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \end{array} \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & a\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \end{array} \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \end{array} \right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1}\right). \end{aligned}$$

En tant qu'espace engendré, on en déduit que

$$\boxed{F \text{ est un espace vectoriel.}}$$

De plus, posons $\mathscr{B}_F = (f_{1,0,0}, f_{0,1,0}, f_{0,0,1})$. La famille $\mathscr{B}_F$ engendre F. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$af_{1,0,0} + bf_{0,1,0} + cf_{0,0,1} = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)}.$$

Autrement dit, $f_{a,b,c} = 0$. Cela signifie que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b,c}(t) = 0_{\mathbb{R}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t} = 0 \\ 2a - b\,\mathrm{e}^t = 0 \\ a + c\,\mathrm{e}^{-t} = 0 \end{cases}$$

Supposons $b \neq 0$. Alors $\lim\limits_{t\to+\infty} b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t} = \pm\infty$ ce qui est contradictoire avec $\forall t \in \mathbb{R}$, $b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t} = 0 \underset{t\to+\infty}{0}$. Donc $b = 0$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} c\,\mathrm{e}^{-t} = 0 \\ 2a = 0 \\ a + c\,\mathrm{e}^{-t} = 0 \end{cases},$$

d'où on déduit que $c = 0$ et $a = 0$. Donc $a = b = c = 0$ ce qui implique que $\mathscr{B}_F$ est libre. Or nous avons vu que $\mathscr{B}_F$ engendre F. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_F \text{ est une base de } F \text{ et } \dim(F) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_F) = 3.}$$

Il était possible naturellement de montrer que F était un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^3\right)$ en montrant l'inclusion, le caractère non-vide et la stabilité par combinaisons linéaires.

2. Soit $f \in F$. Montrons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = Bf(t)$.

   Puisque $f \in F$, par définition, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f = f_{a,b,c}$. Les fonctions $t \mapsto b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t}$, $t \mapsto 2a - b\,\mathrm{e}^t$ et $t \mapsto a + c\,\mathrm{e}^{-t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions constantes et exponentielles. Donc (cf programme de deuxième année) la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \begin{bmatrix} b\,\mathrm{e}^t - c\,\mathrm{e}^{-t} \\ -b\,\mathrm{e}^t \\ -c\,\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}.$$

   D'autre part,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ Bf(t) &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t} \\ 2a - b\,\mathrm{e}^t \\ a + c\,\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3b\,\mathrm{e}^t + 3c\,\mathrm{e}^{-t} + 4a - 2b\,\mathrm{e}^t - 4a - 4c\,\mathrm{e}^{-t} \\ -2b\,\mathrm{e}^t - 2c\,\mathrm{e}^{-t} - 2a + b\,\mathrm{e}^t + 2a + 2c\,\mathrm{e}^{-t} \\ b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t} + 2a - b\,\mathrm{e}^t - 2a - 2c\,\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b\,\mathrm{e}^t - c\,\mathrm{e}^{-t} \\ -b\,\mathrm{e}^t \\ -c\,\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall f \in F,\ \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = Bf(t).}$$

3. Montrons que toutes les courbes $\mathcal{C}_{a,b,c}$ sont planes et que les plans les contenants sont tous parallèles. Pour ce faire, il suffit de montrer qu'il existe un vecteur $\vec{n}$ normal à toutes les cordes $\overrightarrow{f_{a,b,c}(t)f_{a,b,c}(s)}$, $(t,s) \in \mathbb{R}^2$ des courbes $\mathcal{C}_{a,b,c}$.

   Analyse. Par exemple pour $a = c = 0$, $b = 1$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{0,1,0}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Posons alors,

$$\vec{u} = \overrightarrow{f_{0,1,0}(0)f_{0,1,0}(\ln(2))} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   De même pour $a = b = 0$ et $c = 1$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{0,0,1}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}.$$

   Posons alors,

$$\vec{v} = \overrightarrow{f_{0,0,1}(0)f_{0,0,1}(-\ln(2))} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Le vecteur $\vec{n}$ doit être donc orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par exemple,

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Synthèse. Posons $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Soit $f \in F$. Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{bmatrix} b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t} \\ 2a - b\,\mathrm{e}^t \\ a + c\,\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}.$$

   Donc pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{n}, \overrightarrow{f(t)f(s)} \right\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b\,\mathrm{e}^s + c\,\mathrm{e}^{-s} - b\,\mathrm{e}^t - c\,\mathrm{e}^{-t} \\ 2a - b\,\mathrm{e}^s - 2a + b\,\mathrm{e}^t \\ a + c\,\mathrm{e}^{-s} - a - c\,\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b\left(\mathrm{e}^s - \mathrm{e}^t\right) + c\left(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-t}\right) \\ b\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^s\right) \\ c\left(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-t}\right) \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= b\left(\mathrm{e}^s - \mathrm{e}^t\right) + c\left(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-t}\right) + b\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^s\right) - c\left(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-t}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

   Donc pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{f(t)f(s)}$ est orthogonal à $\vec{n}$. Donc $\overrightarrow{f(t)f(s)}$ est dans le plan vectoriel orthogonal à $\vec{n}$. Notons $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ ce plan. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \in f(0) + \overrightarrow{\mathscr{P}}$$

   Ces plans étant tous dirigés par le même plan vectoriel (uniquement translaté d'une origine $f(0)$) ou encore tous orthogonaux à $\vec{n}$, ils sont parallèles entre eux. Conclusion,

$$\boxed{\text{toutes les courbes } \mathcal{C}_{a,b,c} \text{ sont planes et qu'il est possible de choisir des plans qui les contiennent qui soient tous parallèles.}}$$

4. On considère la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de passage de la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est la matrice Q.

   (a) Puisque que $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a directement
   $$\boxed{\vec{u} = 2\vec{j} + \vec{k}, \qquad \vec{v} = \vec{i} - \vec{j}, \qquad \vec{w} = \vec{i} + \vec{k}.}$$

   (b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminons une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}_{a,b,c}$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
   Soient $t \in \mathbb{R}$ et $M(t) \in \mathcal{C}_{a,b,c}$. Par définition,
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(t) &= \left(b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t}\right)\vec{i} + \left(2a - b\,\mathrm{e}^t\right)\vec{j} + \left(a + c\,\mathrm{e}^{-t}\right)\vec{k} \\ &= a\left(2\vec{i} + \vec{k}\right) + b\,\mathrm{e}^t\left(\vec{i} - \vec{j}\right) + c\,\mathrm{e}^{-t}\left(\vec{i} + \vec{k}\right) \\ &= a\vec{u} + b\,\mathrm{e}^t\,\vec{v} + c\,\mathrm{e}^{-t}\,\vec{k} \qquad \text{par la question précédente.} \end{aligned}$$
   Donc les coordonnées de $M(t)$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont :
   $$\begin{cases} X(t) = a \\ Y(t) = b\,\mathrm{e}^t \\ Z(t) = c\,\mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$$
   Conclusion, une représentation paramétrique de $\mathcal{C}_{a,b,c}$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est donnée par
   $$\boxed{\begin{cases} X(t) = a \\ Y(t) = b\,\mathrm{e}^t \\ Z(t) = c\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

   (c) Déduisons-en que chaque courbe $\mathcal{C}_{a,b,c}$ est incluse dans la courbe d'équation $\begin{cases} YZ = bc \\ X = a \end{cases}$.
   Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $M(t) \in \mathcal{C}_{a,b,c}$, $t \in \mathbb{R}$, on a par la question précédente,
   $$\begin{cases} Y(t)Z(t) = b\,\mathrm{e}^t\,c\,\mathrm{e}^{-t} = bc \\ X(t) = a. \end{cases}$$
   Ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en conclut que
   $$\boxed{\text{chaque courbe } \mathcal{C}_{a,b,c} \text{ est incluse dans la courbe d'équation } \begin{cases} YZ = bc \\ X = a \end{cases}.}$$

Troisième Partie.

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Dans cette partie, on note $\mathcal{C}$ la courbe $\mathcal{C}_{1,1,1}$ définie dans la partie précédente.

Une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est donc : $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = 2 - \mathrm{e}^t \\ z(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$

On note $M(t)$ le point de $\mathcal{C}$ de paramètre t.

1. Déterminons $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(\ln(2))$.
   Les coordonnées de $M(\ln(2))$ dans le repère $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ sont
$$\begin{cases} x(\ln(2)) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ y(\ln(2)) = 2 - 2 = 0 \\ z(\ln(2)) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$
   De plus, les coordonnées de $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$ sont $\begin{cases} x'(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} \\ y'(t) = -\mathrm{e}^t \\ z'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ et donc celles de $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(\ln(2))$,
$$\begin{cases} x'(\ln(2)) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y'(\ln(2)) = -2 \\ z'(\ln(2)) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$
   Donc des équations paramétriques de $\mathcal{T}$ sont
$$\boxed{\mathcal{T} : \quad \begin{cases} x(s) = \frac{5+3s}{2} \\ y(s) = -2s \\ z(s) = \frac{3-s}{2} \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.}$$
   De plus, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$\begin{aligned} \exists s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{5+3s}{2} \\ y = -2s \\ z = \frac{3-s}{2} \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{5+3s}{2} \\ y = -2s \\ s = 3 - 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{5+9-6z}{2} = 7 - 3z \\ y = -6 + 4z \\ s = 3 - 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 3z = 7 \\ y - 4z = -6. \end{cases} \end{aligned}$$
   Conclusion, des équations cartésiennes de $\mathcal{T}$ sont
$$\boxed{\mathcal{T} : \quad \begin{cases} x + 3z = 7 \\ y - 4z = -6. \end{cases}}$$

2. Soit T un réel strictement positif. On note $L(T) = \displaystyle\int_0^T \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\| \mathrm{d}t$ la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ entre les points $M(0)$ et $M(T)$.
   (a) Montrons que $\forall t \geqslant 0, \quad 2\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)^2 \leqslant \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\|^2 \leqslant 2\,\mathrm{e}^{2t}$.
   Soit $t \geqslant 0$. On a vu à la question précédente que
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right) \vec{i} - \mathrm{e}^t\, \vec{j} - \mathrm{e}^{-t}\, \vec{k}.$$

Donc
$$\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 = \left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)^2 + \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}.$$
En posant $a = \mathrm{e}^t$ et $b = \mathrm{e}^{-t}$, on observe que pour tout $t \geqslant 0$,
$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 = (a-b)^2 + a^2 + b^2 &\geqslant (a-b)^2 + a^2 + b^2 - 2ab \qquad \text{car } ab \geqslant 0\\ &= 2\,(a-b)^2\\ &= 2\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)^2.\end{aligned}$$
D'autre part,
$$\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 = \left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)^2 + \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{2t} - 2 + \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t} = 2\left(\mathrm{e}^{2t} - 1 + \mathrm{e}^{-2t}\right).$$
Pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-2t} \leqslant 1$ donc $\mathrm{e}^{-2t} - 1 \leqslant 0$. Ainsi,
$$\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 \leqslant 2\,\mathrm{e}^{2t}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \quad 2\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)^2 \leqslant \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 \leqslant 2\,\mathrm{e}^{2t}.}$$

(b) Déduisons-en un encadrement et un équivalent de $L(T)$.
Par la question précédente, comme $T > 0$, $[0;T] \subset \mathbb{R}_+$, donc
$$\forall t \in [0;T], \quad \sqrt{2}\left|\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\| \leqslant \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t.$$
Par la croissance de l'intégrale car $T > 0$,
$$\int_0^T \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t \leqslant L(T) \leqslant \int_0^T \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \quad \text{car } \mathrm{e}^t \geqslant \mathrm{e}^{-t} \text{ car } t \geqslant 0.$$
Donc
$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\left[\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=T} \leqslant L(T) \leqslant \sqrt{2}\left[\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=T}\\ \Rightarrow\quad & 2\sqrt{2}\,(\mathrm{ch}\,(T) - 1) \leqslant L(T) \leqslant \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^T - 1\right).\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{2\sqrt{2}\,(\mathrm{ch}\,(T) - 1) \leqslant L(T) \leqslant \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^T - 1\right).}$$
De plus,
$$2\sqrt{2}\,(\mathrm{ch}\,(T) - 1) \underset{T\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\frac{\mathrm{e}^T}{2} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^T \underset{T\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^T - 1\right).$$
Conclusion, par le théorème d'encadrement des équivalents,
$$\boxed{L(T) \underset{T\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}\,\mathrm{e}^T.}$$

3. Soit Σ la surface d'équation $x^2 - (y-2)^2 - (z-1)^2 = 2$ et Ω le point de coordonnées $(0,2,1)$.
Pour tout réel α, on note Π_α le plan d'équation $x = \alpha$.

(a) Montrons que $\mathcal{C} \subset \Sigma$. Soit $M(t) \in \mathcal{C}$, $t \in \mathbb{R}$. Notons $(x(t), y(t), z(t))$ ses coordonnées. Par définition, $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = 2 - \mathrm{e}^t \\ z(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$. Alors,

$$x(t)^2 - (y(t) - 2)^2 - (z(t) - 1)^2 = \mathrm{e}^{2t} + 2 + \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t} = 2.$$

Donc $M(t) \in \Sigma$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{C} \subset \Sigma.}$$

(b) Déterminons une équation cartésienne du plan tangent $\mathcal{P}_{\ln(2)}$ en $M(\ln(2))$ à Σ i.e. le plan passant par $M(\ln(2))$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2x(\ln(2)) \\ -2(y(\ln(2)) - 2) \\ -2(z(\ln(2)) - 1) \end{pmatrix}$.

Par la question 1. $x(\ln(2)) = 5/2$, $y(\ln(2)) = 0$ et $z(\ln(2)) = 3/2$. Donc $\vec{n}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$. Soit $N(x, y, z)$ un point de l'espace. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
N \in \mathcal{P}_{\ln(2)} \quad & \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{M(\ln(2))\,N}, \vec{n} \right\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x - 5/2 \\ y \\ z - 3/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \text{par la question 1.} \\
& \Leftrightarrow \quad 5x + 4y - z - \frac{22}{2} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 5x + 4y + z = 11.
\end{aligned}$$

Conclusion, une équation du plan tangent en $M(\ln(2))$ à Σ est donné par

$$\boxed{\mathcal{P}_{\ln(2)} : \quad 5x + 4y + z = 11.}$$

(c) Soit $\alpha \geqslant \sqrt{2}$. Déterminons la nature de la courbe $\Lambda_\alpha = \Sigma \cap \Pi_\alpha$. Soit $M(x, y, z)$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \Lambda_\alpha \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - (y-2)^2 - (z-1)^2 = 2 \\ x = \alpha \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 - (y-2)^2 - (z-1)^2 = 2 \\ x = \alpha \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (y-2)^2 + (z-1)^2 = \alpha^2 - 2 \\ x = \alpha. \end{cases}
\end{aligned}$$

Puisque $|\alpha| \geqslant \sqrt{2}$, on a $\alpha^2 - 2 \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{\text{si } |\alpha| \geqslant \sqrt{2},\ \Lambda_\alpha \text{ est le cercle de centre } (\alpha, 2, 1), \text{ de rayon } \sqrt{\alpha - 2} \text{ et de plan } \Pi_\alpha.}$$

Si $|\alpha| < \sqrt{2}$, alors $\alpha^2 - 2$ donc l'équation $(y-2)^2 + (z-1)^2 = \alpha^2 - 2$ n'a pas de solution. Conclusion,

$$\boxed{\text{si } |\alpha| < \sqrt{2},\ \Lambda_\alpha = \emptyset.}$$

(d) On note que la famille $(\Pi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ forme une partition de $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace. Donc

$$\Sigma = \bigsqcup_{\alpha\in\mathbb{R}} (\Sigma\cap\Pi_\alpha) = \bigsqcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \Lambda_\alpha = \bigsqcup_{\alpha,|\alpha|\geqslant\sqrt{2}} \Lambda_\alpha \qquad \text{par la question précédente.}$$

Donc Σ est l'union des cercles Λ_α. Or par la question précédente, Λ_α a pour axe la droite passant par le centre $\Omega_\alpha\,(\alpha,2,1)$ et dont un vecteur directeur est donné par un vecteur normal à Π_α : $\vec{u}_\alpha\,(1,0,0)$. Donc l'axe de Λ_α est la droite dont un paramétrage est donné par

$$\begin{cases} x=\alpha+t, \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}.$$

En changeant le paramètre $s=t+\alpha$, on obtient alors le paramétrage :

$$\begin{cases} x=s, \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}, \ s\in\mathbb{R}.$$

Donc l'axe de Λ_α est la droite passant par $(0,2,1)$ et de vecteur directeur $(1,0,0)$. Cette droite ne dépendant pas du paramètre α, les cercles sont bien coaxiaux. Conclusion,

$\boxed{\Sigma \text{ est l'union de cercles coaxiaux d'axe la droite } \Delta \text{ passant par } (0,2,1) \text{ et de vecteur directeur } (1,0,0).}$

(e) Ceci n'est pas une réponse.

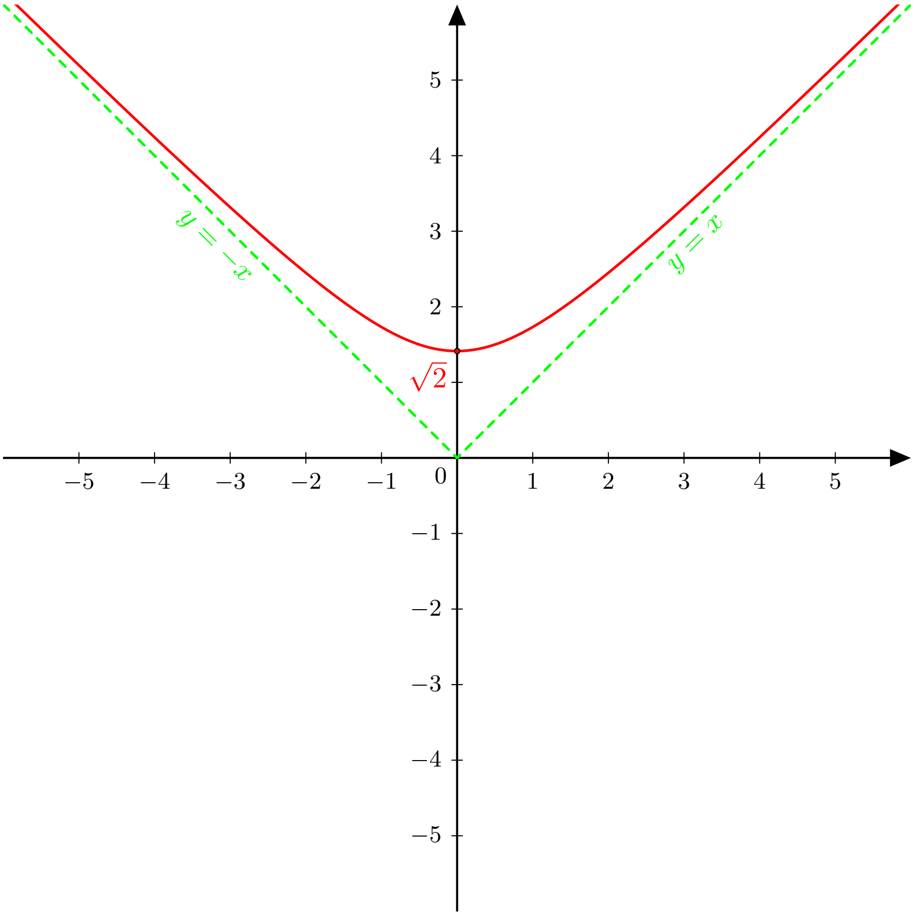
(f) Traçons la courbe d'équations $\begin{cases} x^2-(y-2)^2=2 \\ z=1 \end{cases}$. On se place dans le plan $z=1$ (horizontal d'altitude $z=1$). Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Posons $y'=y-2$, on a

$$x^2-(y-2)^2=2 \qquad\Leftrightarrow\qquad x^2=y'^2+2 \qquad\Leftrightarrow\qquad x=\pm\sqrt{2+y'^2}.$$

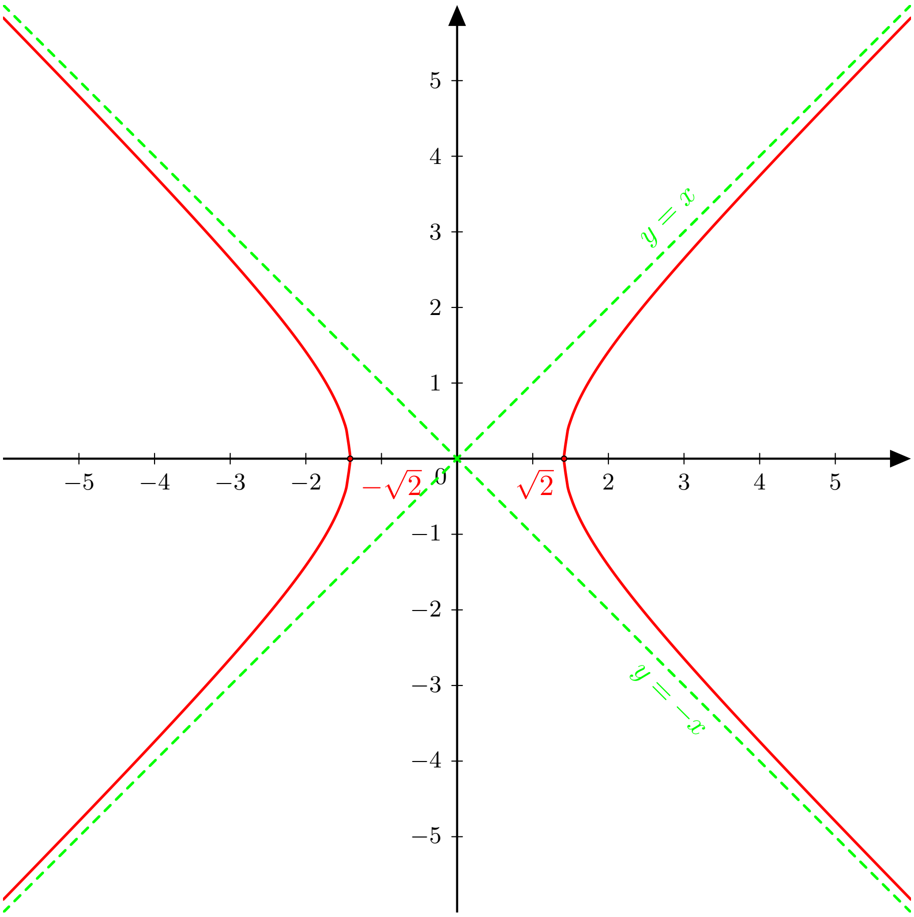
Soit $f : t\mapsto\sqrt{2+t^2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire. Les fonctions $t\mapsto t^2$ et $\sqrt{\cdot}$ étant strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a $f(0)=\sqrt{2}$ et

$$\begin{aligned} f(t)=|t|\sqrt{1+\frac{2}{t^2}} &\underset{t\to+\infty}{=} |t|\left(1+\frac{1}{2}\frac{2}{t^2}+o\left(\frac{2}{t^2}\right)\right) \qquad \text{car } \frac{2}{t^2}\to 0 \text{ quand } t\to+\infty \\ &\underset{t\to+\infty}{=} t+\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

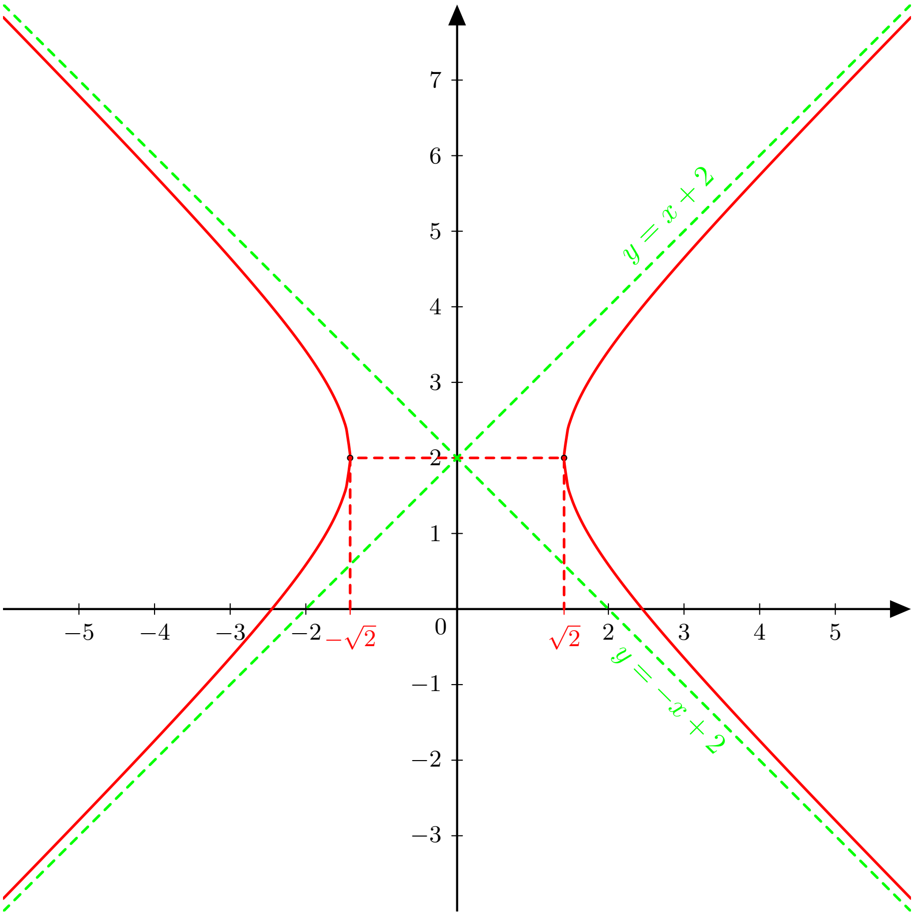
Donc f admet un asymptote d'équation oblique d'équation $y=x$ en $+\infty$ et se trouve au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ (car $1/t>0$). Par parité on obtient le graphe suivant :



La courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation $x = \sqrt{2+y^2}$ s'obtient à partir de la courbe de f en échangeant les rôles de x et de y donc par symétrie axiale d'axe $y = x$. La courbe $\mathcal{C}_2$ d'équation $x = -\sqrt{2+y^2}$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_1$ par symétrie axiale d'axe $x = 0$. On a alors,

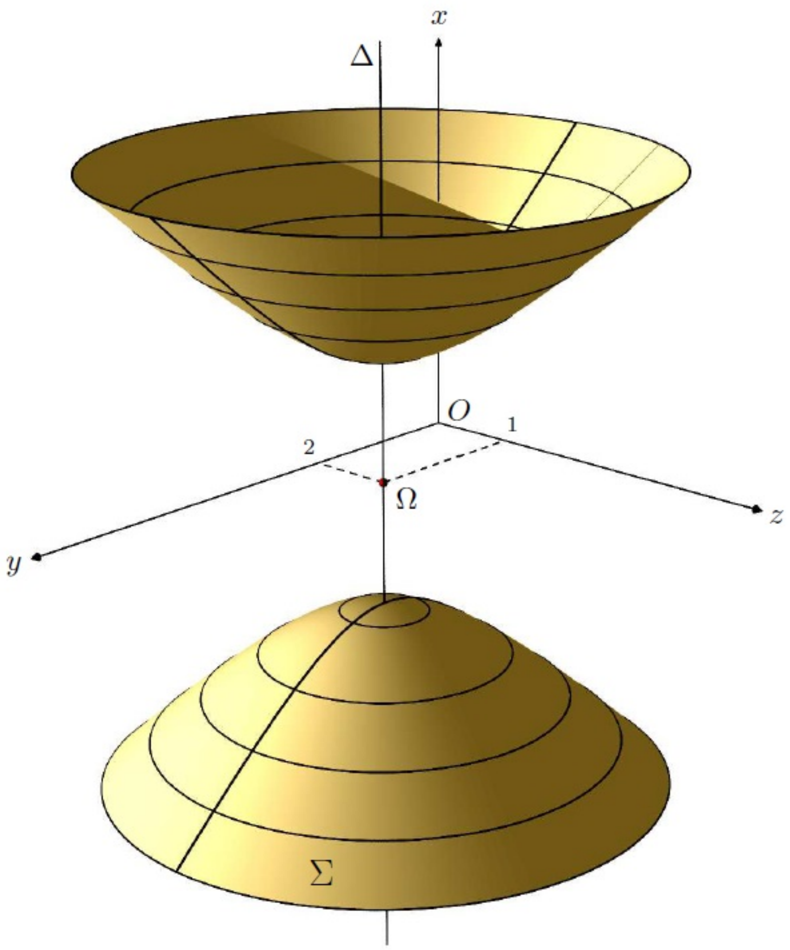


Enfin, pour obtenir le graphe de la courbe d'équation $x^2 - (y-2)^2 = 2$ il faut passer de $y' = y - 2$ à $y = y' + 2$ et donc translater le graphe précédent de $2\overrightarrow{j}$.



On obtient une hyperbole, cf programme de deuxième année !

(g) Voici une représentation de la surface Σ :



Source : A. Cristofari, lycée Laetitia Bonaparte

(h) On note que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} > 0$. Donc le cercle $\mathcal{C}$ est inclus dans le demi-espace $\mathscr{E}_+ = \{ M(x, y, z) \mid x \geqslant 0 \} : \mathcal{C} \subset \mathscr{E}_+$. De plus, la droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{n}\,(1, 0, 0) = \vec{i}$. Donc en faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de Δ, on obtient une surface de révolution incluse dans $\mathscr{E}_+$. Or le point $M_0\left(\sqrt{2}, 2, 1\right)$ appartient à Σ en effet,

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 - (2-2)^2 - (1-1)^2 = 2.$$

Donc $M_0 \in \Sigma$. Or $M_0 \notin \mathscr{E}_+$. Par conséquent, Σ n'est pas incluse dans $\mathscr{E}_+$ contrairement à la surface de révolution considérée. Conclusion,

$$\boxed{\text{la surface de révolution obtenue en faisant tourner } \mathcal{C} \text{ autour de } \Delta \text{ n'est pas égale à } \Sigma.}$$

Quatrième Partie.

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = 2 - \mathrm{e}^t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On note $A(t)$ le point de Γ de paramètre t.

1. Etablissons les tableaux de variation de x et y.

   On note que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = 2\operatorname{ch}(t)$. La fonction x est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} x(t) = +\infty.$$

   D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = 2 - \mathrm{e}^t$. Donc la fonction y est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = 2$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$. Conclusion,

t	$-\infty$		0		$+\infty$
x	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y	2	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2. Déterminons $\mathcal{T}_0$ la tangente à Γ au point $A(0)$ i.e. la droite passant par $A(0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{OA}'(0)$.

   Les coordonnées du point $A(0)$ sont $(2, 1)$ tandis que celles de $\overrightarrow{OA}'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, sont (par dérivabilité de x et y en t)

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} \\ y'(t) = -\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

   En particulier en 0,

$$\begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

   Donc $\mathcal{T}_0$ a pour équations paramétriques,

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Or

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 \\ t = 1 - y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

   Conclusion, la tangente à Γ au point $A(0)$ a pour équation cartésienne

$$\boxed{\mathcal{T}_0 : \quad x = 2.}$$

3. Soit $I\,(x_I, y_I)$ le point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Déterminons (x_I, y_I). On a $y_I = 0$. De plus, $I \in \Gamma$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_I = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ 0 = y_I = 2 - \mathrm{e}^t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_I = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ t = \ln(2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x_I = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

   Donc, le point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses est donné par

$$\boxed{I\,(5/2, 0)\,.}$$

On a vu que ce point est atteint au paramètre $t = \ln(2)$. Notons $\mathcal{T}_{\ln(2)}$ la tangente à Γ en ce point. Déterminons $\mathcal{T}_{\ln(2)}$. Cette droite passe par $I\left(5/2, 0\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées

$$\begin{cases} x'\left(\ln(2)\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y'\left(\ln(2)\right) = -2 \end{cases}.$$

Donc un vecteur directeur de $\mathcal{T}_{\ln(2)}$ est

$$\boxed{\vec{u}\left(3/2, -2\right).}$$

Donc un vecteur normal est $\vec{n}\left(2, 3/2\right)$. Soit $M\left(x, y\right)$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{T}_{\ln(2)} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{IM}, \vec{n} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x - 5/2 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x - 5 + \frac{3}{2} y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4x + 3y = 10. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{T}_{\ln(2)} : \quad 4x + 3y = 10.}$$

4. Déterminons l'équation de l'asymptote à Γ en $-\infty$.

   Quand $t \to -\infty$, on a vu que $x(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $y(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 2$. Conclusion, la droite d'équation

$$\boxed{y = 2 \text{ est l'asymptote à } \Gamma \text{ en } -\infty.}$$

5. Calculons $a = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)}$ puis $b = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) - ax(t)$ et déterminons l'asymptote $\mathcal{D}$ à Γ en $+\infty$. Enfin précisons la position relative de $\mathcal{D}$ à Γ.

   On a

$$a = \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2 - \mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-1 + 2\,\mathrm{e}^{-t}}{1 + \mathrm{e}^{-2t}}.$$

   D'où

$$\boxed{a = \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = -1.}$$

   Puis, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y(t) - ax(t) = 2 - \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} = 2 + \mathrm{e}^{-t}.$$

   Donc

$$\boxed{b = \lim_{t\to+\infty} y(t) - ax(t) = 2.}$$

   Par conséquent, $y(t) + x(t) \underset{t\to+\infty}{=} 2 + o(1)$ ou encore

$$\boxed{y(t) \underset{t\to+\infty}{=} -x(t) + 2 + o(1).}$$

   Conclusion, Γ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ en $+\infty$ d'équation

$$\boxed{\mathcal{D} : \quad y = -x + 2.}$$

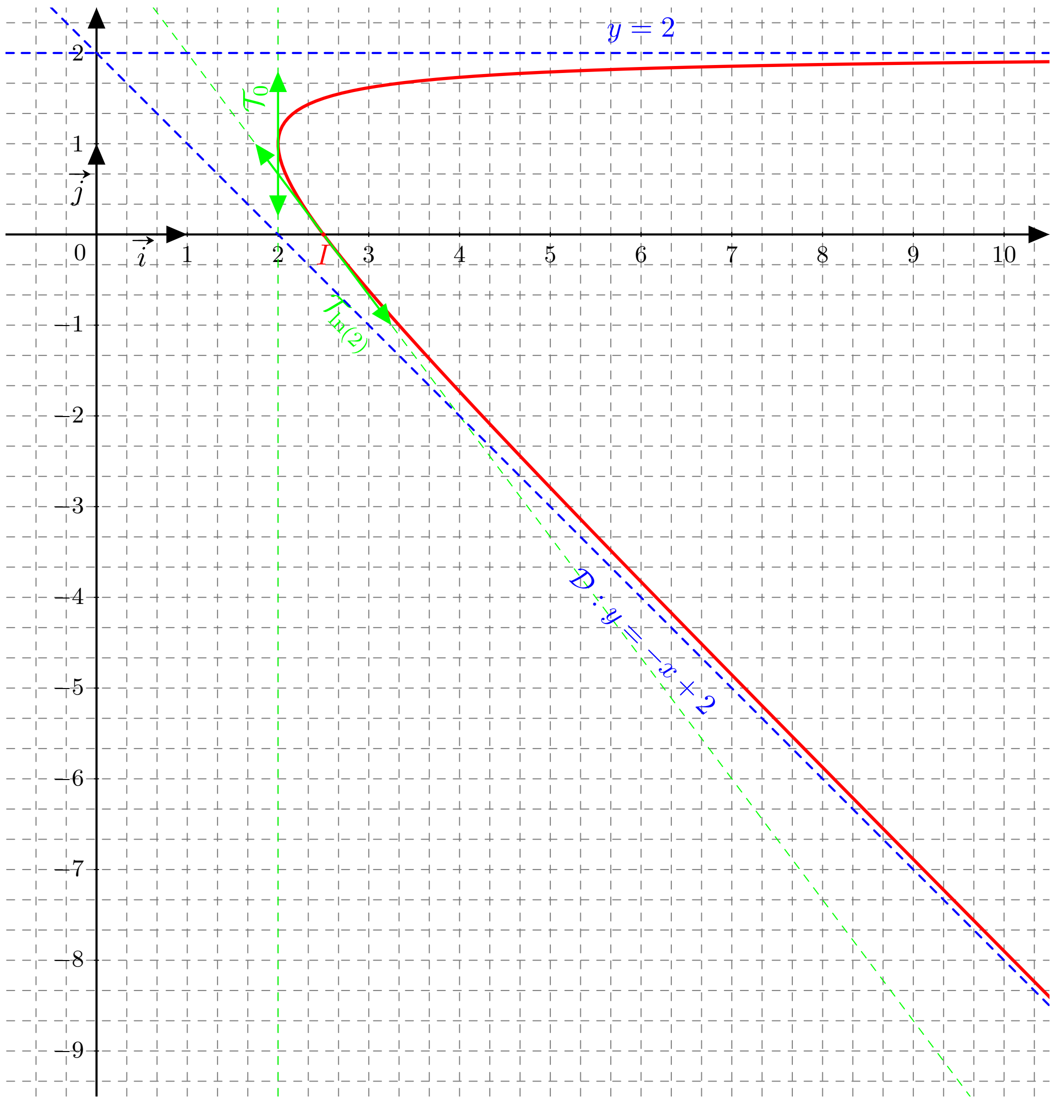
   Enfin,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) - \left(-x(t) + 2\right) = 2 - \mathrm{e}^t - \left(-\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} + 2\right) = \mathrm{e}^{-t} > 0.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\text{la courbe } \Gamma \text{ est au-dessus de son asymptote } \mathcal{D} \text{ en } +\infty.}$$

6. Voici une représentation de Γ :



7. On note $B(t)$ le point de $\mathcal{D}$ ayant la même abscisse que $A(t)$ où $A(t)$ est le point de Γ de paramètre t.

(a) Calculons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $d(t) = A(t)B(t)$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Les coordonnées de $A(t)$ sont $(x(t), y(t))$. Donc l'abscisse de $B(t)$ est $x_B(t) = x(t)$ et son ordonnée $y_B(t) = -x_B(t) + 2 = -x(t) + 2$ car $B \in \mathcal{D}$. D'où

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{(x(t) - x_B(t))^2 + (y(t) - y_B(t))^2} \\ &= \sqrt{(y(t) - (-x(t) + 2))^2} \\ &= |y(t) + x(t) - 2| \\ &= \left|2 - \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} - 2\right| \\ &= \mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ d(t) = \mathrm{e}^{-t}.}$$

(b) Déterminons si les séries $\sum_{n\geqslant 0} d(n)$ et $\sum_{n\geqslant 1} d(\ln(n))$ sont convergentes et éventuellement leur somme totale.

La série

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} d(n) = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n} \text{ converge}}$$

en tant que série géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{-1}$ et $|q| < 1$.
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d(\ln(n)) = \mathrm{e}^{-\ln(n)} = \frac{1}{n}$. Donc

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} d(\ln(n)) = \sum_{n\in\geqslant 1} \frac{1}{n} \text{ diverge}}$$

en tant que série harmonique (ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1$). Enfin, en tant que série géométrique, on a directement,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} d(n) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.}$$

(c) On note S la partie du plan incluse entre la restriction de la courbe Γ à $\mathbb{R}_+$, la droite $\mathcal{D}$ et la droite d'équation $x = 2$.
Notons Γ_+ la restriction de Γ à $\mathbb{R}_+$. Soit $(x, y) \in [2; +\infty[\times]-\infty; 1]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in \Gamma_+ \quad &\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = 2 - \mathrm{e}^t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} x = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ y = 2 - \mathrm{e}^t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} x = \mathrm{e}^t + \frac{1}{e^t} \\ \mathrm{e}^t = 2 - y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} x = 2 - y + \frac{1}{2-y} \\ t = \ln(2-y) \end{cases} \qquad \text{car } y \leqslant 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{(2-y)^2+1}{2-y}.
\end{aligned}$$

Notons (X, Y) les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R} = \left(O; -\vec{j}, \vec{i}\right)$. Pour passer de $\mathscr{R}_O = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ à $\mathscr{R}$, il suffit d'effectuer une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$:

$$P_{(\vec{i},\vec{j})\to(-\vec{j},\vec{i})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc par la formule de changement de base ($X = PX'$),

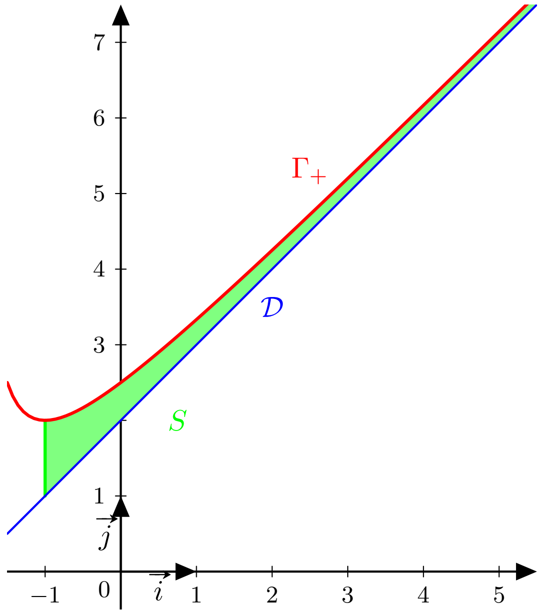
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ -X \end{bmatrix}.$$

Donc $\begin{cases} Y = x \\ X = -y \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = Y \\ y = -X \end{cases}$. Ainsi, une équation cartésienne de Γ_+ dans $\mathscr{R}$ est

$$Y = \frac{(2+X)^2+1}{2+X} = X + 2 + \frac{1}{X+2}.$$

avec $(X, Y) \in [-1; +\infty[\times [2; +\infty[$. De plus, la courbe $\mathcal{D}$ a pour équation dans ce repère,

$$y = -x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad -X = -Y + 2 \quad \Leftrightarrow \quad Y = X + 2.$$



Pour savoir si S est d'aire finie, il nous faut déterminer si la limite suivante existe et est unique :

$$\lim_{X\to+\infty} \int_{-1}^{X} x+2+\frac{1}{x+2}-(x+2)\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $X \geqslant -1$, la fonction $x \mapsto x+2+\frac{1}{x+2}-(x+2) = \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$ est continue sur $[-1;X]$ donc l'intégrale existe et

$$F(X) = \int_{-1}^{X} \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = [\ln(|x+2|)]_{x=-1}^{x=X} = \ln(X+2).$$

Puisque $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X+2) = +\infty$, on en conclut que

$$\boxed{\text{la partie } S \text{ n'est pas d'aire finie.}}$$

Fin du corrigé