Banque PT - Maths C - 2023
Version pour juniors

Les parties en bleu avec astérisque ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Préambule

Dans ce qui suit, on désigne par x_1, x_2, x_3 trois réels distincts, et par P une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que trois, qui ne s'annule pas en x_1, x_2 et x_3. *Comprendre : ni en x_1, ni en x_2, ni en x_3.*

Soit Q la fonction polynomiale définie, pour tout réel x, par :

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

On pose, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On admet qu'il existe trois réels a_1, a_2, a_3 tels que, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \frac{a_3}{x - x_3}.$$

1. En calculant, de deux façons différentes :

$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1)\, g(x)$$

établir que :

$$a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}.$$

Donner les expressions analogues pour a_2 et a_3 (en les justifiant brièvement).

2. On suppose désormais que, pour tout réel x :

$$P(x) = 1$$

avec l'hypothèse suivante :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -\frac{1}{2}.$$

Donner les valeurs explicites de a_1, a_2 et a_3.

Partie I

On considère la fonction F qui, à tout réel x de son domaine de définition $\mathcal{D}_F$, associe :

$$F(x) = \ln\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right).$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_F$. Ce résultat sera nécessairement justifié à l'aide d'un tableau de signes.

2. Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$. On désigne par f sa dérivée.

3. Montrer que, pour tout réel x de $\mathcal{D}_F$:

$$f(x) = \frac{1}{x\,(x+1)\,(2x+1)}.$$

4. On s'intéresse, dans ce qui suit, à la série numérique $\sum f(n)x^{2n+1}$ de paramètre $x \in \mathbb{R}$.

   (a) (*) Montrer qu'il existe R que l'on déterminera tel que pour tout réel x,

   $$\sum f(n)x^{2n+1} \text{ converge } \;\Leftrightarrow\; x \in [-R; R]\,.$$

   (b) (*) Donner le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le n-ième coefficient de ce développement limité. Vérifier que pour tout $x \in \,]-1;1[$, $\sum a_n x^n$ converge. On admet alors que pour tout $x \in \,]-1;1[$, $\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   (c) i. Donner le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}$ en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

   ii. Vérifier que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{1}{1-x^2}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$.

   (d) (*) Déduire de la question précédente, en justifiant le résultat à l'aide d'un théorème de cours, le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note b_n le n-ième coefficient de ce développement limité. Vérifier que pour tout $x \in \,]-1;1[$, $\sum b_n x^n$ converge. On admet alors que pour tout $x \in \,]-1;1[$, $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

   (e) Montrer que, pour tout réel x de $]-R;R[$:

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x\ln\left(1-x^2\right).$$

   (f) Pour tout réel x de $]-R;R[$, exprimer, à l'aide de fonctions usuelles :

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n\,(n+1)\,(2n+1)}.$$

   Indication : on pensera à utiliser les résultats du Préambule.

   (g) Déterminer

   $$\lim_{x\to 1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n\,(n+1)\,(2n+1)}\right).$$

5. On considère désormais la série de terme général $f(n)$, pour $n \geqslant 1$.

   (a) Etudier la convergence de la série de terme général $f(n)$, pour $n \geqslant 1$.

   (b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

   $$H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

   Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H(2n+1) - \frac{1}{2}H(n).$$

(c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 + 4H(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}.$$

Partie II

Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;+\infty[$, à valeurs positives, et $\sum a_n$ une séries à termes strictement positifs.
Pour tout réel positif x, on désigne par $n_x = \lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, et on pose :

$$A(x) = \sum_{k=1}^{n_x} a_k.$$

avec la convention $A(0) = 0$.

1. Tracer, sur deux graphes distincts, les courbes représentatives respectives de la fonction partie entière, et de la fonction qui, à tout réel $t \geqslant 1$, associe $t - \lfloor t \rfloor$ (échelle : 1 cm pour une unité).

2. Dans cette question uniquement, on désigne par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} A(k)\left(u_{k+1} - u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(A(k-1) - A(k)\right) u_k + A(n)u_{n+1}.$$

3. Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 1$:
$$A\left(n_x\right) = A(x).$$

Aussi incroyable cela soit-il, le concepteur du sujet a posé des questions hors programme en introduisant des intégrales de fonctions non continues sur tout l'intervalle. Ainsi, à partir de là et jusqu'à la fin, on manipulera les intégrales « comme si » c'était des intégrales de fonctions continues.

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k :

$$\int_k^{k+1} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t = A(k)\int_k^{k+1} h'(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. On pose par convention qu'une somme démarrant à 1 et finissant à 0 vaut 0. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$:

$$\int_1^{n_x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\left(h(k+1) - h(k)\right).$$

6. Exprimer, pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $A(k) - A(k-1)$ en fonction de a_k.

7. (a) Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\left(h(k+1) - h(k)\right) = \sum_{k=1}^{n_x} \left(A(k+1) - A(k)\right) h(k) + A\left(n_x\right) h\left(n_x\right).$$

   (b) A l'aide des questions précédentes, montrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n_x} a_k h(k) = A(x)h(x) - \int_1^x A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t.$$

8. On suppose désormais que, pour tout entier naturel non nul n : $a_n = 1$.

(a) Montrer que, pour tout $t \geqslant 1$, $A(t)$ est égal à la partie entière de t :

$$A(t) = n_t.$$

(b) Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$:

$$n_x h(n_x) - h(1) = \int_1^{n_x} h(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{n_x} t h'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) A l'aide des relations des questions précédentes, montrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n_x} h(k) = h(1) + \int_1^{n_x} (t - n_t)\, h'(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{n_x} h(t)\,\mathrm{d}t.$$

9. Dans ce qui suit, on suppose désormais que h est la fonction qui, à tout réel $t \geqslant 1$, associée :

$$h(t) = \frac{1}{t}.$$

(a) (*)

i. Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\frac{\sqrt{2}n - \lfloor \sqrt{2}n \rfloor}{n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

ii. Montrer la convergence de la série : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{2}n - \lfloor \sqrt{2}n \rfloor}{n^2}$.

iii. Que vaut :

$$\ell = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}n - \lfloor \sqrt{2}n \rfloor}{n^2}.$$

On admet dans la suite que

$\displaystyle\int_1^{+\infty} (t - n_t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} (t - n_t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ existe dans $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_N^{+\infty} (t - n_t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \ell$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel N non nul :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^N (t - n_t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

(c) Montrer qu'il existe une constante réelle γ telle que, lorsque l'entier N tend vers l'infini :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \ln N + \gamma + o(1).$$

(d) A l'aide des résultats précédents, déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (4H(n) - 4H(2n+1))$.

(e) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$, où f désigne la fonction introduite au début de la partie I, question 2.

La constante d'Euler, qui permet d'obtenir un équivalent des sommes partielles de la série harmonique, est très utile pour calculer explicitement des sommes de séries, comme cela est fait au cours de la première partie du problème. Elle peut s'exprimer en fonction d'une intégrale généralisée faisant intervenir la partie fractionnaire, comme cela est étudié au cours de la seconde partie.

Fin de l'épreuve