Corrigé - Banque PT - Maths C - 2023
Version pour juniors

Préambule

Dans ce qui suit, on désigne par x_1, x_2, x_3 trois réels distincts, et par P une fonction polynomiale de degré strictement plus petit que trois, qui ne s'annule pas en x_1, x_2 et x_3. Comprendre : ni en x_1, ni en x_2, ni en x_3.
Soit Q la fonction polynomiale définie, pour tout réel x, par :

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

On pose, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On admet qu'il existe trois réels a_1, a_2, a_3 tels que, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$g(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \frac{a_3}{x - x_3}.$$

1. Montrons que $a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}$ et procédons de même pour a_2 et a_3.

   On a, d'une part, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$,

$$(x - x_1)\, g(x) = a_1 + (x - x_1)\frac{a_2}{x - x_2} + (x - x_1)\frac{a_3}{x - x_3}.$$

   Donc

$$\lim_{\substack{x \to x_1 \\ x \neq x_1}} (x - x_1)\, g(x) = a_1.$$

   D'autre part,

$$(x - x_1)\, g(x) = (x - x_1)\frac{P(x)}{Q(x)} = (x - x_1)\frac{P(x)}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)} = \frac{P(x)}{(x - x_2)(x - x_3)}.$$

   Ainsi, par continuité de P (en tant que fonction polynomiale), on a

$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1)\, g(x) = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}.$$

   Or la fonction Q est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q'(x) = (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2).$$

   Donc

$$Q'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3).$$

   Puisque x_1 est distinct de x_2 et x_3, on a $Q'(x_1) \neq 0$ et

$$\frac{P(x_1)}{Q'(x_1)} = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}.$$

   Donc par ce qui précède,

$$\lim_{x \to x_1} (x - x_1)\, g(x) = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{a_1 = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}.}$$

De même,

$$\lim_{x \to x_2} (x - x_2)\, g(x) = \lim_{x \to x_2} (x - x_2) \frac{a_1}{x - x_1} + a_2 + (x - x_2) \frac{a_3}{x - x_3} = a_2$$

et

$$\lim_{x \to x_2} (x - x_2)\, g(x) = \lim_{x \to x_2} \frac{P(x)}{(x - x_1)(x - x_3)} = \frac{P(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{P(x_2)}{Q'(x_2)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{a_2 = \frac{P(x_2)}{Q'(x_2)}.}$$

Enfin, de la même façon, on obtient

$$\boxed{a_3 = \frac{P(x_3)}{Q'(x_3)}.}$$

2. On suppose désormais que, pour tout réel x :

$$P(x) = 1$$

avec l'hypothèse suivante :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -\frac{1}{2}.$$

Déterminons les valeurs explicites de a_1, a_2 et a_3.

Par la question précédente,

$$a_1 = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)} = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{1}{1 \times 1/2} = 2.$$

De même,

$$a_2 = \frac{1}{(-1)(-1/2)} = 2 \qquad \text{et} \qquad a_3 = \frac{1}{(-1/2)(1/2)} = -4.$$

Conclusion,

$$\boxed{a_1 = a_2 = 2,\ a_3 = -4}$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -1/2, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x + \frac{1}{2}}.$$

Partie I

On considère la fonction F qui, à tout réel x de son domaine de définition $\mathcal{D}_F$, associe :

$$F(x) = \ln\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right).$$

1. Déterminons $\mathcal{D}_F$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$x \in \mathcal{D}_F \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} \text{ existe et est strictement positif.}$$

Or, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(2x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}_F =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\,.}$$

2. Justifions que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$.

   Les fonctions $x \mapsto x(x+1)$ et $x \mapsto (2x+1)^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiale. La fonction $x \mapsto (2x+1)^2$ ne s'annule qu'en $-\frac{1}{2}$. Donc la fonction $h : x \mapsto \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et par la question précédente, $\forall x \in \mathcal{D}_F =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$, $h(x) > 0$. Donc par composée,

   $$\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_F.}$$

   On désigne par f sa dérivée.

3. Calculons f.

   Pour tout $x \in \mathcal{D}_F$, on a

   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}\right)'}{\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}} \\ &= \frac{(2x+1)(2x+1)^2 - x(x+1)\,2\times 2\times(2x+1)}{(2x+1)^4} \times \frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} \\ &= \frac{(2x+1)^2 - 4x(x+1)}{2x+1} \times \frac{1}{x(x+1)} \\ &= \frac{1}{2x+1} \times \frac{1}{x(x+1)}. \end{aligned}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_F, \quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}.}$$

4. On s'intéresse, dans ce qui suit, à la série numérique $\sum f(n)x^{2n+1}$ de paramètre $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Déterminons R tel que $\sum f(n)x^{2n+1}$ converge $\Leftrightarrow$ $x \in [-R;R]$.
   Posons $R = 1$. Soit $x \in [-1;1]$. On a

   $$0 \leqslant \left|f(n)x^{2n+1}\right| = \left|\frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}\right| \leqslant \frac{1}{2n^3}.$$

   Or la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que

   $$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left|f(n)x^{2n+1}\right| \text{ converge.}$$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ converge absolument donc converge. Ainsi,

$$\forall x \in [-1;1]\,, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1} \text{ converge.}$$

Soit $x > 1$, alors, par croissance comparée, $f(n)x^{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ diverge grossièrement. De même, si $x < -1$, alors on a $f(n)x^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ car $2n+1$ est impair donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)x^{2n+1}$ diverge grossièrement. Conclusion,

$$\boxed{\text{pour } R = 1, \text{ on a } \sum f(n)x^{2n+1} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1;1]\,.}$$

(b) Le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est donné par

$$\boxed{\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^p}{p} + o(x^p)\,.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le n-ième coefficient de ce développement limité : $a_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = -\frac{1}{n}$. Vérifions que pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n x^n$ converge.
Soit $x \in]-1;1[$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant |a_n x^n| = \frac{|x|^n}{n} \leqslant |x|^n\,.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x|^n$ converge en tant que série géométrique dont la raison $|x|$ vérifie $|x| \in]-1;1[$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n x^n| \text{ converge.}$$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ converge absolument. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[\,, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \text{ converge.}}$$

On admet alors que pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

(c) i. Soit $p \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n)\,.$$

Posons $u = x^2$. Alors $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\frac{1}{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o\left(x^{2n}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} \begin{cases} 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^p + o(x^p) & \text{si } p \text{ est pair} \\ 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^p + o\left(x^{p-1}\right) & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}}$$

ii. Vérifions que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{1}{1-x^2}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$.
Méthode 1. On intuite et donne directement le résultat.
Méthode 2. Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}$, tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}.$$

On observe que

$$a = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} (1-x) \frac{1}{1-x^2} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$
$$b = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x \neq -1}} (1+x) \frac{1}{1-x^2} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x \neq -1}} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}.$$

(d) Déterminons le développement limité à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ en 0 de $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.
Par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} &\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^p + o(x^p)\right) + \frac{1}{2} \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^p x^n + o(x^n)\right) \\ &\underset{x \to 0}{=} \begin{cases} 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^n + o(x^n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{n-1} + o(x^n) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \left]-1; 1\right[$, par la question précédente, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$. Donc une primitive F de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est donnée par

$$F : x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(|1-x|) + \frac{1}{2} \ln(|1+x|) = -\frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1+x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Par le théorème de primitivation du développement limité, on a

$$F(x) \underset{x \to 0}{=} F(0) + \begin{cases} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + o\left(x^{n+1}\right) & \text{si } n+1 \text{ est pair} \\ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o\left(x^{n+1}\right) & \text{si } n+1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{x \to 0}{=} \begin{cases} x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^p}{p} + o(x^p) & \text{si } p \text{ est pair} \\ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{p-1}}{p-1} + o(x^p) & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note b_n le n-ième coefficient de ce développement limité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. Vérifions que pour tout $x \in \left]-1; 1\right[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ converge.
Soit $x \in \left]-1; 1\right[$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |b_n x^n| \leqslant |x|^n.$$

Comme précédemment, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ converge en tant que série géométrique de raison $|x| \in]-1;1[$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n x^n|$ converge donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ converge absolument. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[\,, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n \text{ converge.}}$$

On admet alors que pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(e) On rappelle que $R = 1$. Montrons pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x\ln\left(1-x^2\right)$.

Soit $x \in]-1;1[$. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n}.$$

Puisque $x \in]-1;1[$, on a $x^2 \in [0;1[\subset]-1;1[$. Donc par la question 4.b la série converge bien et on en conclut que

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x\ln\left(1-x^2\right).}$$

(f) Soit $x \in]-1;1[$, exprimons $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$.

Par la question 2. pour tout $n \in \mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}\setminus\{-1,-1/2,0\}$,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+1/2)} = \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{4}{n+\frac{1}{2}}.$$

ou encore,

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}.$$

Donc pour tout $x \in]-1;1[\setminus\{0\}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{x^{2n+1}}{n} + \frac{x^{2n+1}}{n+1} - \frac{4x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{n} + \frac{1}{x^2}\frac{x^{2(n+1)+1}}{n+1} - 4\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

On a alors

- par la question précédente, pour tout $x \in]-1;1[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n+1}}{n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x\ln\left(1-x^2\right).$$

- Par la question précédente, pour tout $x \in]-1;1[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2(n+1)+1}}{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n+1}}{n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2(n+1)+1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} - x^3 = -x\ln\left(1-x^2\right) - x^3.$$

- par la question 4.d la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x.$$

Par somme, pour tout $x \in]-1;1[\setminus \{0\}$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$ converge et

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} &= -x\ln\left(1-x^2\right) - \frac{x\ln\left(1-x^2\right)+x^3}{x^2} - 4\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x\right)\\ &= -\frac{x^2+1}{x}\ln\left((1-x)(1+x)\right) - x - 2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 4x\\ &= 3x + \left(2 - \frac{x^2+1}{x}\right)\ln(1-x) - \left(\frac{x^2+1}{x}+2\right)\ln(1+x)\\ &= 3x - \frac{x^2-2x+1}{x}\ln(1-x) - \frac{x^2+2x+1}{x}\ln(1+x).\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in]-1;1[$, on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = \begin{cases} 3x - \frac{(x-1)^2}{x}\ln(1-x) - \frac{(x+1)^2}{x}\ln(1+x) & \text{si } x \neq 0\\ 0 & \text{si } x = 0.\end{cases}}$$

(g) Calculons $\lim_{x\to 1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}\right)$. Par croissance comparée, on sait que (en posant $h = 1-x$),

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-1)^2\ln(1-x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} h^2\ln(h) = 0.$$

Donc par produit et somme et la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}\right) = 3 - 4\ln(2).}$$

5. On considère désormais la série de terme général $f(n)$, pour $n \geqslant 1$.

(a) Etudions la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^3} > 0.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3 > 1$. De plus, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{1}{2n^3} > 0$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, on en conclut que

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} f(n) \text{ converge.}}$$

(b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H\left(2n+1\right) - \frac{1}{2}H(n)$. On observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} &= \sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant 2n+1 \\ p \text{ impair}}} \frac{1}{p} \\
&= \sum_{1 \leqslant p \leqslant 2n+1} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{1 \leqslant p \leqslant 2n+1 \\ p \text{ pair}}} \frac{1}{p} \\
&= H\left(2n+1\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= H\left(2n+1\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= H\left(2n+1\right) - \frac{1}{2}H(n).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = H\left(2n+1\right) - \frac{1}{2}H(n).}$$

(c) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 + 4H(n) - 4H\left(2n+1\right) + \frac{1}{n+1}$.

Par la question 2., $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\left(k+1\right)\left(2k+1\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}.$$

On reconnait $H(n)$ dans la première somme, on effectue le glissement d'indice $\tilde{k} = k+1$ dans la deuxième et on utilise le résultat de la question précédente pour la troisième somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(k) &= H(n) + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 4\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - 1\right) \\
&= H(n) + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 - 4\left(H\left(2n+1\right) - \frac{1}{2}H(n) - 1\right) \\
&= H(n) + \frac{1}{n+1} + H(n) - 1 - 4H\left(2n+1\right) + 2H(n) + 4.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 + 4H(n) - 4H\left(2n+1\right) + \frac{1}{n+1}.}$$

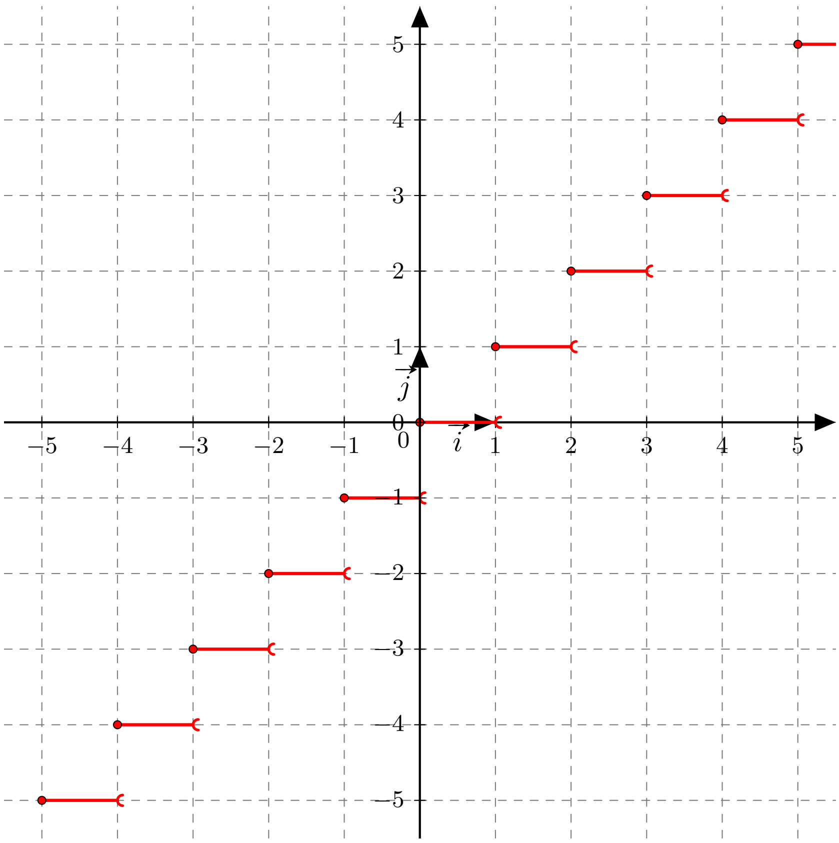
Partie II

Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;+\infty[$, à valeurs positives, et $\sum a_n$ une séries à termes strictement positifs.
Pour tout réel positif x, on désigne par $n_x = \lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, et on pose :

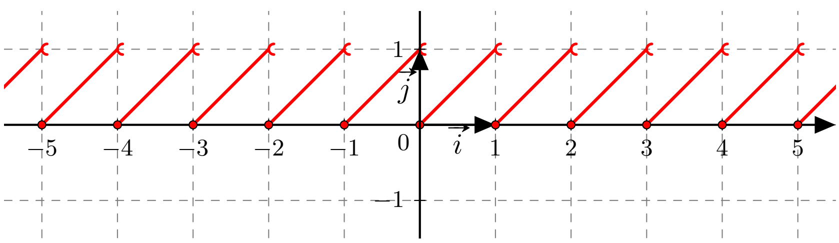
$$A(x) = \sum_{k=1}^{n_x} a_k.$$

avec la convention $A(0) = 0$.

1. Voici le graphe de la fonction partie entière $t \mapsto \lfloor t \rfloor$:



Voici le graphe de la fonction $t \mapsto t - \lfloor t \rfloor$:



2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que

$$\sum_{k=1}^{n} A(k)\,(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n} (A(k-1) - A(k))\,u_k + A(n)u_{n+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} A(k)\left(u_{k+1}-u_{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k} a_{l}\right)\left(u_{k+1}-u_{k}\right) \qquad \text{car } k \text{ est entier} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} a_{l}\left(u_{k+1}-u_{k}\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n} a_{l}\left(u_{k+1}-u_{k}\right) \qquad \text{car la somme est triangulaire} \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{l}\sum_{k=l}^{n}\left(u_{k+1}-u_{k}\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{l}\left(u_{n+1}-u_{l}\right) \qquad \text{car la somme est télescopique} \\
&= u_{n+1}\sum_{l=1}^{n} a_{l}-\sum_{l=1}^{n} a_{l}u_{l} \\
&= u_{n+1}A(n)-\sum_{l=1}^{n} a_{l}u_{l}.
\end{aligned}$$

Or on observe que pour tout $l \geqslant 2$, $u_l = \sum_{i=1}^{l} u_i - \sum_{i=1}^{l-1} u_i = A(l) - A(l-1)$, ce qui est encore vrai si $l=1$ car $A(0)=0$. D'où,

$$\sum_{k=1}^{n} A(k)\left(u_{k+1}-u_{k}\right) = u_{n+1}A(n) - \sum_{l=1}^{n}\left(A(l)-A(l-1)\right)u_{l}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} A(k)\left(u_{k+1}-u_{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(A(k-1)-A(k)\right)u_{k} + A(n)u_{n+1}.}$$

3. Soit $x \geqslant 1$. Montrons que $A(n_x) = A(x)$.

On a $n_x = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}^*$. Donc par propriété de partie entière, $n_{n_x} = \lfloor n_x \rfloor = n_x$. Ainsi, comme $n_x \geqslant 1$,

$$A(n_x) = \sum_{k=1}^{n_{n_x}} a_k = \sum_{k=1}^{n_x} a_k = A(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \geqslant 1, \quad A(n_x) = A(x).}$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrons que $\int_k^{k+1} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t = A(k)\int_k^{k+1} h'(t)\,\mathrm{d}t$.

Puisque $k \geqslant 1$, $\forall t \in [k; k+1]$, on a $t \geqslant 1$. Donc par la question précédente,

$$\forall t \in [k; k+1], \quad A(t) = A(n_t).$$

Or pour tout $t \in [k; k+1]$, $n_t = \lfloor t \rfloor = k$. Donc

$$\forall t \in [k; k+1], \quad A(t) = A(k).$$

En multipliant par $h'(t)$ et en intégrant, on obtient,

$$\int_k^{k+1} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} \underbrace{A(k)}_{\text{indépendant de } t} h'(t)\,\mathrm{d}t = A(k)\int_k^{k+1} h'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_k^{k+1} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t = A(k)\int_k^{k+1} h'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

5. On pose par convention qu'une somme démarrant à 1 et finissant à 0 vaut 0. Soit $x \in [1;+\infty[$. Montrons que $\int_1^{n_x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\left(h(k+1)-h(k)\right)$. Supposons $x \geqslant 2$, alors $n_x - 1 \in \mathbb{N}^*$. Donc en sommant le résultat de la question précédente entre 1 et $n_x - 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n_x-1}\int_k^{k+1} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\int_k^{k+1} h'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par la relation de Chasles, si $x \geqslant 2$,

$$\int_1^{n_x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\left[h(t)\right]_{t=k}^{t=k+1} = \sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\left(h\left(k+1\right)-h(k)\right).$$

Si $x \in [1;2[$, alors $n_x = 0$. Donc dans ce cas, $\forall t \in [0;1[$, $n_t = 0$ et donc $A(t) = \sum_{k=1}^{0} a_k = 0$ par convention. Ainsi, $\int_1^{n_x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Et d'autre part, on observe que $\sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\left(h(k+1)-h(k)\right) = \sum_{k=1}^{-1} A(k)\left(h(k+1)-h(k)\right) = 0$ par convention. Donc l'égalité précédente est encore vraie si $x \in [1;2[$.
Conclusion,

$$\boxed{\forall x \geqslant 1, \quad \int_1^{n_x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\left(h(k+1)-h(k)\right).}$$

6. Soit $k \geqslant 1$. Exprimons $A(k) - A(k-1)$ en fonction de a_k. Si $k \geqslant 2$, alors $k - 1 \geqslant 1$ et donc

$$A(k) - A(k-1) = \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{k-1} a_i = a_k.$$

Si $k = 1$, $A(1) - A(0) = A(1) = \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$. Donc la relation précédente reste vraie. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A(k) - A(k-1) = a_k.}$$

7. (a) Soit $x \geqslant 1$. Montrons que $\sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\left(h(k+1)-h(k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(A(k-1)-A(k)\right)u_k + A(n)u_{n+1}$..

Supposons $x \geqslant 2$. Alors $n_x - 1 \geqslant 1$. Donc par la question 2. en posant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = h(k)$ et en prenant $n = n_x - 1 \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\left(h(k+1)-h(k)\right) &= \sum_{k=1}^{n_x-1} \left(A(k-1)-A(k)\right) h(k) + A\left(n_x-1\right) h\left(n_x\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n_x} \left(A(k-1)-A(k)\right) h(k) - \left(A\left(n_x-1\right) - A\left(n_x\right)\right) h\left(n_x\right)\\ &\qquad + A\left(n_x-1\right) h\left(n_x\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n_x} \left(A(k-1)-A(k)\right) h(k) + A\left(n_x\right) h\left(n_x\right).\end{aligned}$$

Si $x \in [1;2[$, $n_x = 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\left(h(k+1)-h(k)\right) = \sum_{k=1}^{0} A(k)\left(h(k+1)-h(k)\right) = 0$ et

$$\sum_{k=1}^{n_x} \left(A(k-1)-A(k)\right) h(k) + A\left(n_x\right) h\left(n_x\right) = \left(A(0)-A(1)\right) h(1) + A\left(1\right) h\left(1\right) = 0.$$

Donc l'égalité précédente reste vraie si $k = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n_x \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\left(h(k+1)-h(k)\right) = \sum_{k=1}^{n_x} \left(A(k-1)-A(k)\right) h(k) + A\left(n_x\right) h\left(n_x\right).}$$

(b) Soit $x \geqslant 1$. Montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_x} a_k h(k) = A(x)h(x) - \int_1^x A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t$.

Par la question 6. pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = A\left(k\right) - A\left(k-1\right)$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_x} a_k h(k) &= \sum_{k=1}^{n_x} \left(A\left(k\right) - A\left(k-1\right)\right) h(k)\\ &= -\sum_{k=1}^{n_x} \left(A(k-1)-A(k)\right) h(k)\\ &= -\sum_{k=1}^{n_x-1} A(k)\left(h(k+1)-h(k)\right) + A\left(n_x\right) h\left(n_x\right) \qquad \text{par la question précédente}\\ &= A\left(n_x\right) h\left(n_x\right) - \int_1^{n_x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{par la question 5.}\\ &= A\left(n_x\right) h\left(n_x\right) - \left(\int_1^{x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{n_x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t\right) \qquad \text{par la relation de Chasles}\\ &= A\left(n_x\right) h\left(n_x\right) - \int_1^{x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{n_x}^{x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or pour tout $t \in [n_x; x]$, $\lfloor t \rfloor = n_x$ donc $\displaystyle A(t) = \sum_{k=1}^{n_t} a_k = \sum_{k=1}^{n_x} a_k = A\left(n_x\right)$, indépendant de t, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_x} a_k h(k) &= A\left(n_x\right) h\left(n_x\right) - \int_1^{x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{n_x}^{x} A\left(n_x\right) h'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= A\left(n_x\right) h\left(n_x\right) - \int_1^{x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t + A\left(n_x\right) \int_{n_x}^{x} h'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= A\left(n_x\right) h\left(n_x\right) - \int_1^{x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t + A\left(n_x\right)\left(h(x) - h\left(n_x\right)\right)\\ &= A\left(n_x\right) h\left(x\right) - \int_1^{x} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= A(x)h(x) \qquad \text{par 3.}\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n_x} a_k h(k) = A(x)h(x) - \int_1^x A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

8. On suppose désormais que, pour tout entier naturel non nul n : $a_n = 1$.
   (a) Soit $t \geqslant 1$. Montrons que $A(t) = n_t$. Par la question 3. $A(t) = A(n_t)$. Donc

$$A(t) = \sum_{k=1}^{n_t} a_k = \sum_{k=1}^{n_t} 1 = n_t.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall t \geqslant 1, \quad A(t) = n_t.}$$

   (b) Soit $x \geqslant 1$, alors $n_x \geqslant 1$. Montrons que $n_x h(n_x) - h(1) = \int_1^{n_x} h(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{n_x} th'(t)\,\mathrm{d}t$.
   Posons

$$\forall t \geqslant 1, \quad \begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = h(t). \end{cases}$$

   Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ donc sur $[1;n_x]$ et

$$\forall t \geqslant 1, \quad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = h'(t). \end{cases}$$

   Donc par intégration par parties,

$$\int_1^{n_x} h(t)\,\mathrm{d}t = [th(t)]_{t=1}^{t=n_x} - \int_1^{n_x} th'(t)\,\mathrm{d}t = n_x h(n_x) - h(1) - \int_1^{n_x} th'(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall x \geqslant 1, \quad n_x h(n_x) - h(1) = \int_1^{n_x} h(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{n_x} th'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

   (c) Soit $x \geqslant 1$. Montrons que $\sum_{k=1}^{n_x} h(k) = h(1) + \int_1^{n_x} (t - n_t) h'(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{n_x} h(t)\,\mathrm{d}t$.

   Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = 1$, $\sum_{k=1}^{n_x} h(k) = \sum_{k=1}^{n_x} a_k h(k)$. Donc par la question baie avec $x' = n_x$,

$$\sum_{k=1}^{n_x} h(k) = A(n_x))h(n_x) - \int_1^{n_{n_x}} A(t)h'(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Or $n_x \in \mathbb{N}^*$ donc $n_{n_x} = n_x$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_x} h(k) &= n_x h(n_x) - \int_1^{n_x} n_t h'(t)\,\mathrm{d}t && \text{par la question 8.a} \\ &= h(1) + \int_1^{n_x} h(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{n_x} th'(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^{n_x} n_t h'(t)\,\mathrm{d}t && \text{par la question précédente.} \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall x \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n_x} h(k) = h(1) + \int_1^{n_x} (t - n_t) h'(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{n_x} h(t)\,\mathrm{d}t.}$$

9. Dans ce qui suit, on suppose désormais que h est la fonction qui, à tout réel $t \geqslant 1$, associée :

$$h(t) = \frac{1}{t}.$$

(a) i. Montrons $\dfrac{\sqrt{2}n - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{2}n - 1 < \lfloor\sqrt{2}n\rfloor \leqslant \sqrt{2}n$. Donc $-\sqrt{2}n \leqslant -\lfloor\sqrt{2}n\rfloor < 1 - \sqrt{2}n$. Ainsi,

$$0 \leqslant \sqrt{2}n - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor < 1.$$

Ou encore,

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant n^2\left(\frac{\sqrt{2}n - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor}{n^2}\right) < 1.$$

Par conséquent, la suite $\left(\left(\frac{\sqrt{2}n - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor}{n^2}\right) / \left(\frac{1}{n^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Conclusion,

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}n - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

ii. Montrons que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{2}n - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor}{n^2}$ converge.

On sait que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge absolument en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par la question précédente et le théorème de comparaison de domination des séries,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{2}n - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor}{n^2} \text{ converge.}}$$

iii. Déterminons $\displaystyle\ell = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}n - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor}{n^2}$.

Par la question précédente, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ il est possible de définir le reste d'ordre $N-1$ de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{2}n - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor}{n^2}$: $R_{N-1} = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}n - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor}{n^2}$, la somme totale $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}n - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor}{n^2}$ et pour tout $N \geqslant 2$,

$$R_{N-1} = S - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sqrt{2}n - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor}{n^2}.$$

Or par définition de la convergence de la série, on a

$$\lim_{N\to+\infty} R_{N-1} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\ell = 0.}$$

On admet dans la suite que

$$\int_1^{+\infty} (t - n_t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A (t - n_t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ et que } \lim_{N\to+\infty} \int_N^{+\infty} (t - n_t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \ell.$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^N (t - n_t) \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

On a, pour $N \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^N (t-n_t)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} &= 1 + \int_1^N \frac{t-t+n_t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_1^N \frac{n_t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{n_t}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par la relation de Chasles} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{k}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{car pour tout } t \in [k; k+1],\ n_t = k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} k \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} k \left[-\frac{1}{t}\right]_{t=k}^{t=k+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} k \times \frac{1}{k(k+1)} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} \qquad \text{en posant } \tilde{k} = k+1 \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Si $N = 1$,

$$1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^N (t-n_t)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1 + 0 - 0 = 1 = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

et l'égalité reste donc vraie. Conclusion,

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^N (t-n_t)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.}$$

(c) Montrons qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \underset{N \to +\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1)$.

Par la question 9.(a)iii $\lim_{A \to +\infty} \int_1^A (t - n_t) \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ existe dans $\mathbb{R}$. Notons,

$$L = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A (t-n_t)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int_1^{+\infty} (t-n_t)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Par la question précédente, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} &= 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^N (t - n_t) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= 1 + \ln(N) - \int_1^N (t - n_t) \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \underset{N \to +\infty}{=} 1 + \ln(N) - L + o(1).$$

Posons $\gamma = 1 - L \in \mathbb{R}$, alors, on en conclut que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \underset{N \to +\infty}{=} \ln N + \gamma + o(1).}$$

(d) Par la question précédente, comme $2n + 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

$$\begin{aligned}4H(n) - 4H(2n+1) &\underset{n \to +\infty}{=} 4(\ln(n) + \gamma + o(1)) - 4(\ln(2n+1) + \gamma + o(1)) \\ &\underset{n \to +\infty}{=} 4\ln(n) + 4\gamma + o(1) - 4\ln\left(2n\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right) - 4\gamma + o(1) \\ &\underset{n \to +\infty}{=} 4\ln(n) + o(1) - 4\ln(2) - 4\ln(n) - \underbrace{4\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}_{=o(1)} \\ &\underset{n \to +\infty}{=} -4\ln(2) + o(1).\end{aligned}$$

Conclusion, $(4H(n) - 4H(2n+1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} 4H(n) - 4H(2n+1) = -4\ln(2).}$$

(e) Déterminons la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

Par la question 5.c pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = 3 + 4H(n) - 4H(2n+1) + \frac{1}{n+1}.$$

Donc par la question précédente, on retrouve que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)$ converge (question 5.a) et on en conclut que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = 3 - 4\ln(2).}$$

La constante d'Euler, qui permet d'obtenir un équivalent des sommes partielles de la série harmonique, est très utile pour calculer explicitement des sommes de séries, comme cela est fait au cours de la première partie du problème. Elle peut s'exprimer en fonction d'une intégrale généralisée faisant intervenir la partie fractionnaire, comme cela est étudié au cours de la seconde partie.

Fin du corrigé