

**Devoir de Révision PTSI
d'après Banque PT - Maths C - 2024**

Les parties en *bleu avec astérisque* ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Préambule

1. Rappeler, pour tout réel x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction *cosinus*, l'autre la fonction *tangente*) de la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \tan(x).$$

2. (a) Montrer que la fonction g qui, à tout réel x de $]0; \pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, associe $g(x) = \frac{1}{\tan(x)}$, se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $]0; \pi[$. Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $]0; \pi[$.
(b) En déduire une primitive sur $]0; \pi[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}.$$

3. On considère les fonctions

$$f_1 : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

- (a) Expliciter les domaines de définitions respectifs $\mathcal{D}_{f_1} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2} \subset \mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2 .
(b) Montrer que les fonctions f_1 et f_2 sont périodiques, de périodes respectives T_1 et T_2 que l'on explicitera.
(c) Donner les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2 .
(d) Donner, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_1 , l'expression de $f_1'(x)$.
(e) Montrer que, en tout réel x de dérivabilité de la fonction f_2 ,

$$f_2'(x) = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et en déduire une expression simplifiée de $f_2'(x)$.

- (f) Etudier les variations des fonctions f_1 et f_2 . On donnera leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords.
Donner, également, les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
(g) Tracer, sur un même graphe (échelle : 1 cm pour une unité), la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_{f_1} \cap [-2\pi; 2\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_{f_2} \cap [-2\pi; 2\pi]$.

4. On considère la fonction

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- (a) Expliciter le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_3} \subset \mathbb{R}$ de la fonction f_3 . Quel est le domaine de dérivabilité de f_3 ?
(b) Etudier les variations de la fonction f_3 sur $[0; \frac{\pi}{4}]$. On donnera son tableau de variations, en précisant les limites aux bords.

Partie I

* On aura besoin dans cette partie du résultat suivant que l'on pourra admettre : soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

Alors, la série dite *alternée* $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x_n$ converge de plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k x_k \right| \leq x_{n+1}.$$

1. (a) Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction logarithme népérien $\ln$.
(b) Soit $\varepsilon > 0$. Exprimer, en fonction de ε :

$$\int_{\varepsilon}^1 \ln(t) dt.$$

- (c) * En déduire si $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\varepsilon}^1 \ln(t) dt$ existe ou non.

2. * Déterminer un équivalent simple en 0^+ de la fonction $x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.
3. (a) * Déterminer le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction arctangente ($\arctan$).
On note $(a_k)_{k \in \llbracket 0; 2n+1 \rrbracket}$ les coefficients de ce développement limité :

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k + o(x^{2n+1}).$$

- (b) * Déterminer suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$ la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$.

4. * On admet que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} dx.$$

Exprimer alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} dx$ en fonction de la somme d'une série, et sans le signe intégral.

5. On pose :

$$\mathcal{C} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

- (a) Montrer, à l'aide du changement de variable $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = u$, que :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = -2\mathcal{C}.$$

- (b) Justifier que $\frac{8}{9}$ est une valeur approchée de $\mathcal{C}$ (on donnera la précision).

(c) Pour tout entier naturel non nul N , on pose :

$$S_N = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Soit p un entier strictement plus grand que 2. Donner la valeur d'un entier naturel non nul N à partir de laquelle S_N est une valeur approchée de $\mathcal{C}$ à 10^{-2p} près.

Partie II

On considère l'équation différentielle sur $]0; \pi[$:

$$y''(x) + y(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad (\mathcal{E})$$

1. On introduit la fonction f_4 qui, à tout réel x de $]0; \pi[$, associe :

$$f_4(x) = \sin(x) \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right).$$

Montrer que, pour tout réel x de $]0; \pi[$:

$$f_4''(x) = -f_4(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

2. Résoudre l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

3. Montrer que les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0; \pi[$ sont de la forme :

$$y = y_0 + f_4$$

où y_0 est une solution de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

4. Dans cette question, on souhaite retrouver de façon différente le résultat obtenu précédemment. Pour cela, on cherche les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0; \pi[$ de la forme :

$$x \mapsto y(x) = z(x) \sin(x)$$

où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0; \pi[$.

- Montrer que si y est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0; \pi[$, alors z' est solution sur $]0; \pi[$ d'une équation différentielle de premier ordre, notée $(\mathcal{E}')$.
- Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}')$, puis appliquer la méthode de variation de la constante pour déterminer les solutions de $(\mathcal{E}')$. Donner alors, pour tout réel x de $]0; \pi[$, l'expression de $z'(x)$ en fonction de x .
- A l'aide du Préambule, exprimer, pour tout réel x de $]0; \pi[$, $z(x)$ en fonction de x .
- Montrer que l'on retrouve bien l'expression des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0; \pi[$ obtenues plus haut.

Partie III

On introduit les fonctions G et H , définies respectivement sur les domaines $\mathcal{D}_G \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_H \subset \mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_G : \quad G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_H : \quad H(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

1. Expliciter, en le justifiant avec soin, $\mathcal{D}_G$.
2. (a) * Soit $g : u \mapsto e^{-u^2}$. Montrer que g est 1-lipschitzienne.
(b) En déduire la continuité de la fonction G .

3. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0.$$

4. * On admet que G est dérivable sur $\mathcal{D}_G$ et que

$$\forall x \in \mathcal{D}_G, \quad G'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{2x}{\cos^2(\theta)} e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta.$$

5. (a) Expliciter $\mathcal{D}_H$.
(b) Montrer que la fonction H est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_H$. On explicitera la dérivée de H .
6. A l'aide du changement de variable $u = x \tan(\theta)$, montrer que, en tout réel x de son domaine de dérivabilité,

$$G'(x) = -2e^{-x^2} H(x).$$

(On distinguera les cas $x = 0$ et $x \neq 0$).

7. Montrer que la fonction $H^2 + G$ est constante, en précisant la valeur de cette constante.
8. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x^2} dx$, ainsi qu'une expression simplifiée de $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-xt^2} dt$, pour tout réel $x > 0$.

Partie IV

1. * Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler le développement limité en 0 de la fonction sinus à l'ordre $2n + 1$.
2. On considère la fonction φ , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

* Montrer que φ admet un développement limité à l'ordre $2n$ en 0 que l'on précisera.

3. Dans cette question, N désigne un entier strictement positif, et x est un réel quelconque. On introduit le polynôme P_N tel que :

$$P_N(X) = \left(1 - \frac{X}{\pi}\right) \left(1 + \frac{X}{\pi}\right) \left(1 - \frac{X}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{X}{2\pi}\right) \dots \left(1 - \frac{X}{N\pi}\right) \left(1 + \frac{X}{N\pi}\right).$$

Quel est le coefficient, noté α_N , de X^2 dans $P_N(X)$?

4. On désigne par α le coefficient de x^2 dans le développement **limité en 0** de φ , et on suppose que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \alpha_N = \alpha.$$

En déduire, grâce au **développement limité en 0** de φ , la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

5. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

ainsi que celle de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

6. On pose :

$$\mathcal{D} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)^2}.$$

Que vaut $2\mathcal{D} - \mathcal{C}$? ($\mathcal{C}$ est la constante introduite dans la Partie I)

7. On donne :

$$\frac{\pi^2}{8} = 1,2337 \pm 10^{-4}.$$

Donner une valeur approchée de $\mathcal{D}$.

Dans ce problème, les propriétés de fonctions trigonométriques permettent d'exprimer des sommes de séries classiques - comme $\mathcal{C} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$, où $\mathcal{C}$ est la constante de Catalan - ou encore, la très classique intégrale de Gauss, dont la valeur est déterminée ici à l'aide d'intégrales à paramètres.

Fin de l'épreuve