Corrigé - Banque PT - Maths C - 2024
Version pour juniors

Préambule

1. Rappelons, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction *cosinus*, l'autre la fonction *tangente*) de la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \tan(x).$$

D'après le cours, on a directement

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.}$$

2. (a) Montrons que la fonction g qui, à tout réel x de $]0;\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, associe $g(x)=\frac{1}{\tan(x)}$, se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $]0;\pi[$ et montrons que $\tilde{g}$ est dérivable sur $]0;\pi[$. On a

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} g(x) = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

De même,

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} g(x) = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x\neq\frac{\pi}{2}}} g(x) = 0$ et existe bien dans $\mathbb{R}$. Donc en posant

$$\tilde{g} : x \mapsto \begin{cases} g(x) \text{ si } x \in]0;\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ g(x) \text{ si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

On prolonge

$$\boxed{g \text{ en une fonction continue sur }]0;\pi[.}$$

De plus, pour tout $x\in]0;\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$,

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)},$$

ce qui reste vrai en $\frac{\pi}{2}$: $\tilde{g}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ et $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0}{1} = 0$. Donc

$$\forall x \in]0;\pi[, \quad \tilde{g}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

La fonction cos est dérivable sur $]0;\pi[$ et la fonction sin aussi et ne s'annule pas sur cet intervalle. En tant que quotient, on en déduit que

$$\boxed{\tilde{g} \text{ est dérivable sur }]0;\pi[.}$$

(b) Déduisons-en une primitive sur $]0;\pi[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}.$$

On sait que $\tilde{g}$ est dérivable sur $]0;\pi[$. De plus,

$$\forall x \in \left]0;\pi\right[, \quad g'(x) = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\tilde{g} = \frac{\cos}{\sin} \text{ est une primitive de } \frac{1}{\sin^2} \text{ sur }]0;\pi[.}$$

3. On considère les fonctions

$$f_1 : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

(a) Explicitons les domaines de définitions respectifs $\mathcal{D}_{f_1} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2} \subset \mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_{f_1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_{f_2} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ existe} \\ \tan\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 0 + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi; \pi + 2k\pi[. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{ \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}, \qquad \mathcal{D}_{f_2} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi; \pi + 2k\pi[.}$$

(b) Montrons que les fonctions f_1 et f_2 sont périodiques, de périodes respectives T_1 et T_2 que l'on explicitera. On note que si $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, alors $x + 2\pi \in \mathcal{D}_{f_1}$ de plus,

$$f_1(x+2\pi) = \tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

car la fonction tan est π-périodique. Donc f_1 est $T_1 = 2\pi$-périodique. De même, si $x \in \mathcal{D}_{f_2}$ alors $x + 2\pi \in D_{f_2}$ et

$$f_2(x+2\pi) = \ln(f_1(x+2\pi)) = \ln(f_1(x)) = f_2(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les fonctions } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques.}}$$

(c) Donnons les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2. En tant que composées de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition, on en déduit que

$$\boxed{f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont dérivables respectivement sur } \mathcal{D}_{f_1} \text{ et } \mathcal{D}_{f_2}.}$$

(d) Donnons, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_1, l'expression de $f_1'(x)$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, on a

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}\tan'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\frac{1+\cos(x)}{2}} = \frac{1}{1+\cos(x)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_{f_1}, \quad f_1'(x) = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{1+\cos(x)}.}$$

(e) Montrons que, en tout réel x de dérivabilité de la fonction f_2,

$$f_2'(x) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et déduisons-en une expression simplifiée de $f_2'(x)$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_2}$, on a par la question précédente,

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \left(\ln\left(f_1(x)\right)\right)' \\ &= \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}} \\ &= \frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Or $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_{f_2}, \qquad f_2'(x) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin(x)}.}$$

(f) Etudions les variations des fonctions f_1 et f_2 et donnons leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords.
Donnons, également, les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Par la question 3.d pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, $f_1'(x) = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} > 0$. Donc f_1 est strictement croissante sur $]-\pi;\pi[$. De plus,

$$\lim_{\substack{x\to-\pi \\ x>-\pi}} f_1(x) = \lim_{\substack{x\to-\pi \\ x>-\pi}} \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{\substack{y\to-\frac{\pi}{2} \\ y>-\frac{\pi}{2}}} \tan(y) = -\infty.$$

De plus, la fonction f_1 est impaire et par imparité, on a aussi $\lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} f_1(x) = +\infty$. De plus, $f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Ainsi,

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{2}$		π
f_1	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$

D'autre part, par la question précédente, pour tout $x \in D_{f_2}$,

$$f_2'(x) = \frac{1}{\sin(x)} > 0.$$

Donc la fonction f_2 est strictement croissante sur $]0;\pi[$. De plus,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_2(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \ln\left(0^+\right) = -\infty.$$

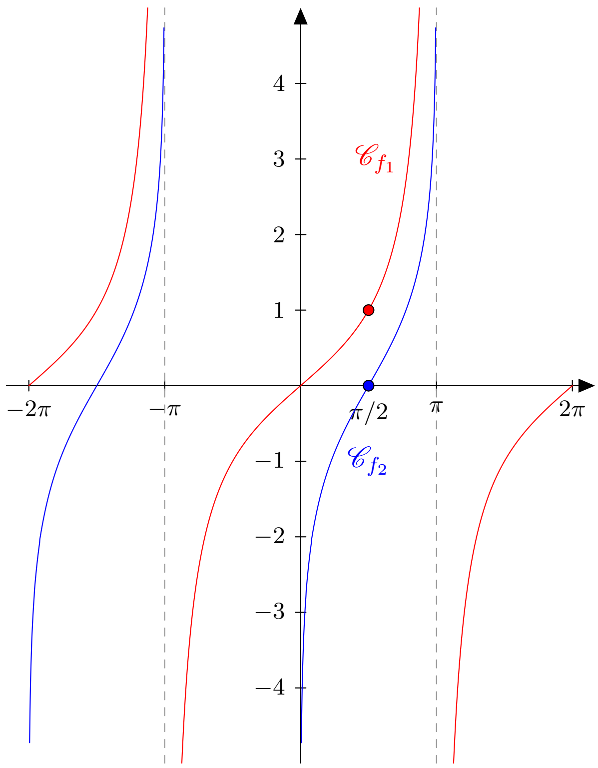
Et,

$$\lim_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} f_2(x) = \lim_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \ln\left(+\infty\right) = +\infty.$$

Enfin, $f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \ln(1) = 0$. Conclusion,

x	$-\pi$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
f_2	‖	//////	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

(g) Traçons, sur un même graphe (échelle : 1 cm pour une unité), la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_{f_1} \cap [-2\pi; 2\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_{f_2} \cap [-2\pi; 2\pi]$.



4. On considère la fonction

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

(a) Explicitons le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_3} \subset \mathbb{R}$ de la fonction f_3 ainsi que son domaine de dérivabilité. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathcal{D}_{f_3} \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2(x) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

De plus, f_3 est dérivable sur $\mathcal{D}_{f_3}$ comme composée de fonctions (cos et inverse) dérivables sur leurs domaines de définition. :

$$\boxed{f_3 \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_{f_3}.}$$

(b) Etudions les variations de la fonction f_3 sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et donnons son tableau de variations, en précisant les limites aux bords. La fonction cosinus est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto x^2$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée, on en déduit que f_3 est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. De plus $f_3(0) = 1$ et $f_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$. Conclusion,

x	0		$\frac{\pi}{4}$
f_3	1	$\nearrow$	2

Partie I

* On aura besoin dans cette partie du résultat suivant que l'on pourra admettre : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

Alors, la série dite *alternée* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x_n$ converge de plus,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n x_n \right| \leqslant x_{n+1}.$$

1. (a) Donnons une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction logarithme népérien ln. La fonction

$$\boxed{t \mapsto t\ln(t) - t \text{ est une primitive de la fonction ln.}}$$

Cela se détermine par une intégration par parties.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Exprimons, en fonction de ε :

$$\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par la question précédente,

$$\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_{t=\varepsilon}^{t=1} = \varepsilon\ln(\varepsilon) - \varepsilon - (0-1) = \varepsilon\ln(\varepsilon) - \varepsilon + 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \varepsilon + \varepsilon\ln(\varepsilon).}$$

(c) * Déduisons-en si $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ existe ou non. Par croissance comparée $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}} \varepsilon\ln(\varepsilon) = 0$. Donc par la question précédente,

$$\boxed{\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{existe et} \quad \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = 1.}$$

2. * Déterminons un équivalent simple en 0^+ de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$. Posons $u(x) = \frac{x}{2}$, puisque $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\tan(u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$, alors

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(\frac{x}{2} + o(x)\right) \underset{x\to 0}{=} \ln(x) - \ln(2) + \ln(1 + o(1)).$$

Conclusion,

$$\boxed{\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x).}$$

3. (a) * Déterminons le développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction arctangente (arctan) et notons $(a_k)_{k\in[\![0;2n+1]\!]}$ les coefficients de ce développement limité :

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k + o\left(x^{2n+1}\right).$$

On sait que

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right).}$$

Ainsi, les coefficients sont données par

$$\boxed{\forall k \in [\![0;n]\!], \quad a_{2k} = 0 \text{ et } a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1}.}$$

(b) * Déterminer suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$ la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Soit $x \in]-1;1[$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |u_n| = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \leqslant |x|^{2n+1} = |x| \times \left(x^2\right)^n.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x^2\right)^n$ converge en tant que série géométrique de raison $x^2 \in [0;1[\subset]-1;1[$. Dès lors, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ converge.}$$

Par conséquent, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la converge. Donc si $x \in]-1;1[$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Si $x = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{2n+1}$. On a $x_n \geqslant 0$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par le critère des séries alternées (la propriété admise en début de partie), on en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x_n \text{ converge.}$$

Si $x > 1$, alors, par croissance comparée, $\left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement et donc diverge.

Si $x = -1$, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$. Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n} > 0$ donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

Enfin, si $x < -1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \left]-1;1\right].}$$

4. * On admet que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \frac{\arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x.$$

Exprimons $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x$ en fonction de la somme d'une série, et sans le signe intégral. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{(-1)^n}{2n+1}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{x=0}^{x=1}\\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

Donc par ce qui est admis, on conclut que

$$\boxed{\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \frac{\arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.}$$

5. On pose :

$$\mathcal{C} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

(a) Montrons, à l'aide du changement de variable $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = u$, que :

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = -2\mathcal{C}.$$

Soit $\varepsilon \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $x \in \left[\varepsilon;\frac{\pi}{2}\right]$, posons $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ i.e. $x = 2\arctan(u)$. Si $x = \varepsilon$, alors $u = \tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ et si $x = \frac{\pi}{2}$, alors $x = 1$. De plus, la fonction $u \mapsto 2\arctan(u)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right);1\right]$ et $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$. Ainsi,

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = \int_{\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}^1 \ln(u)\,\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Posons pour tout $u \in \left[\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right);1\right]$,

$$\begin{cases} f(u) = 2\arctan(u)\\ g(u) = \ln(u).\end{cases}$$

Les fonctions f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $\left[\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right);1\right]$ et

$$\forall u \in \left[\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right);1\right], \qquad \begin{cases} f'(u) = \frac{2}{1+u^2}\\ g'(u) = \frac{1}{u}.\end{cases}$$

Par le théorème d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_{\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}^{1} \ln(u)\,\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= \left[2\arctan(u)\ln(u)\right]_{u=\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}^{u=1} - \int_{\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}^{1} 2\frac{\arctan(u)}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= 0 - 2\frac{\varepsilon}{2}\ln\left(\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) - \int_{\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}^{1} 2\frac{\arctan(u)}{u}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Or on a vu que $\ln\left(\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \ln(\varepsilon)$ donc $\varepsilon\ln\left(\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \varepsilon\ln(\varepsilon)$. Donc par croissance comparée,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \varepsilon\ln\left(\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = 0.$$

De plus, quand $\varepsilon \to 0$, alors $\varepsilon' = \tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \longrightarrow 0$. Ainsi, la limite existe et

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(-2\frac{\varepsilon}{2}\ln\left(\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) - \int_{\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}^{1} 2\frac{\arctan(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right)\\ &= 0 - \lim_{\substack{\varepsilon'\to 0\\ \varepsilon'>0}} 2\int_{\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}^{1} \frac{\arctan(u)}{u}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Par la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = -2\mathcal{C}.}$$

(b) Justifions que $\frac{8}{9}$ est une valeur approchée de $\mathcal{C}$ (on donnera la précision). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$. On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

Donc par le critère spécial des séries alternées (la propriété admise en début de partie) la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ converge de plus,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad |R_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right| \leqslant x_{N+1}.$$

En particulier pour $N = 1$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right| \leqslant x_2 = \frac{1}{25} \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} - \left(1 - \frac{1}{9}\right)\right| \leqslant \frac{1}{25}\\ &\Leftrightarrow \quad \left|\mathcal{C} - \frac{8}{9}\right| \leqslant \frac{1}{25}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{8}{9} \text{ est une valeur approchée de } \mathcal{C} \text{ à une précision de } 0,04 \text{ près.}}$$

(c) Pour tout entier naturel non nul N, on pose :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Soit p un entier strictement plus grand que 2. Donnons la valeur d'un entier naturel non nul N à partir de laquelle S_N est une valeur approchée de $\mathcal{C}$ à 10^{-2p} près. De même que la question précédente, on a

$$|\mathcal{C} - S_N| \leqslant 10^{-2p} \qquad \Leftrightarrow \qquad |R_N| \leqslant 10^{-2p}.$$

Or $R_N \leqslant x_{N+1} = \frac{1}{(2N+3)^2}$. Donc il suffit de prendre

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2N+3)^2} \leqslant 10^{-2p} \qquad &\Leftrightarrow \qquad (2N+1)^2 \geqslant 10^{2p} \\
&\Leftrightarrow \qquad 2N+3 \geqslant 10^p \\
&\Leftrightarrow \qquad N \geqslant \frac{10^p - 3}{2} = 5 \times 10^{p-1} - \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

N étant un entier, il suffit de prendre,

$$\boxed{N = 5 \times 10^{p-1} - 1.}$$

Partie II

On considère l'équation différentielle sur $]0;\pi[$:

$$y''(x) + y(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad (\mathcal{E})$$

1. On introduit la fonction f_4 qui, à tout réel x de $]0;\pi[$, associe :

$$f_4(x) = \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Montrons que, pour tout réel x de $]0;\pi[$:

$$f_4''(x) = -f_4(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

La fonction sinus est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]0;\pi[$ et la fonction f_2 est deux fois dérivable sur $]0;\pi[$ donc pas produit, $f_4 = \sin f_2$ est deux fois dérivable sur $]0;\pi[$, de plus, par la question 3.e pour tout $x \in]0;\pi[$,

$$f_4'(x) = \cos(x) f_2(x) + \sin(x) \times \frac{1}{\sin(x)} = \cos(x) f_2(x) + 1.$$

Puis,

$$f_4''(x) = -\sin(x) f_2(x) + \cos(x)\frac{1}{\sin(x)} = -f_4(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0;\pi[, \quad f_4''(x) = -f_4(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.}$$

2. Résolvons l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$ donnée par

$$\forall x \in]0;\pi[, \quad y''(x) + y(x) = 0.$$

L'équation caractéristique associée est donnée par $r^2 + 1 = 0 \ \Leftrightarrow r^2 = -1$ dont les solutions sont i et $-i$. Dès lors, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est donnée par

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathcal{E}_0} = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(x) + B\sin(x) \end{array} \ \middle|\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

3. Montrons que les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$ sont de la forme :

$$y = y_0 + f_4$$

où y_0 est une solution de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

Par la question 1., la fonction f_4 est une solution de l'équation $(\mathcal{E})$ donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est donné par

$$\mathscr{S}_{\mathcal{E}} = \{\, f_4 + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_{E_0} \,\}\,.$$

Ainsi, par la question précédente,

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{array}{ccc}]0;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_4(x) + A\cos(x) + B\sin(x) \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

4. Dans cette question, on souhaite retrouver de façon différente le résultat obtenu précédemment. Pour cela, on cherche les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$ de la forme :

$$x \mapsto y(x) = z(x)\sin(x)$$

où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0;\pi[$.

(a) Montrons que si y est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$, alors z' est solution sur $]0;\pi[$ d'une équation différentielle de premier ordre, notée $(\mathcal{E}')$. Supposons y solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$:

$$\forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad y''(x) + y(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Puisque z est deux fois dérivable sur $]0;\pi[$, on a $y'' = z''\sin + 2z'\cos - z\sin$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad z''(x)\sin(x) + 2z'(x)\cos(x) - z(x)\sin(x) + z(x)\sin(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad z''(x) + 2z'(x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \qquad \text{car } \sin(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Conclusion, $Z = z'$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad Z'(x) + 2Z(x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \qquad (\mathcal{E}')\,.}$$

(b) Déterminons les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}')$, puis appliquons la méthode de variation de la constante pour déterminer les solutions de $(\mathcal{E}')$. Nous donnerons alors, pour tout réel x de $]0;\pi[$, l'expression de $z'(x)$ en fonction de x.

L'équation homogène associée à $(\mathcal{E}')$ est donnée par

$$\forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad Z'(x) + 2Z(x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0 \qquad (\mathcal{E}'_0)\,.$$

La fonction $x \mapsto 2\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est continue sur $]0;\pi[$ donc admet des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par $x \mapsto 2\ln(|\sin(x)|) = \ln\left(\sin^2(x)\right)$. Dès lors, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}'_0)$ est donné par

$$\mathscr{S}_{\mathcal{E}'_0} = \left\{ \begin{array}{ccc}]0;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\,\mathrm{e}^{-\ln\left(\sin^2(x)\right)} \end{array} \;\middle|\; A \in \mathbb{R} \right\},$$

ou encore

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathcal{E}'_0} = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{A}{\sin^2(x)} \end{array} \middle| A \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Soient Z une fonction dérivable sur $]0;\pi[$, $Z_0 = \frac{1}{\sin^2}$ et $\lambda = \frac{Z}{Z_0}$ car Z_0 ne s'annule pas sur $]0;\pi[$. La fonction λ est dérivable sur $]0;\pi[$ en tant que quotient et l'on a

$$\begin{aligned} & Z \text{ solution de } (\mathcal{E}') \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad Z'(x) + 2Z(x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad \lambda'(x)Z_0(x) + \underbrace{\lambda(x)Z_0'(x) + 2\,\lambda(x)Z_0(x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}_{=0 \text{ car } Z_0 \in \mathscr{S}_{\mathcal{E}'_0}} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad \lambda'(x) = \frac{\cos(x)}{Z_0(x)\sin^2(x)} = \cos(x) \text{ car } Z_0(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad \lambda(x) = \sin(x) + A \\ \Leftrightarrow \quad & \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad Z(x) = \frac{\sin(x) + A}{\sin^2(x)}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathcal{E}'} = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{A}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\sin(x)} \end{array} \middle| A \in \mathbb{R} \right\}.}$$

En particulier, il existe un réel $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad z'(x) = \frac{A}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\sin(x)}.}$$

(c) A l'aide du Préambule, exprimons, pour tout réel x de $]0;\pi[$, $z(x)$ en fonction de x. Par la question 2.b la fonction $\frac{\cos}{\sin}$ est une primitive de $\frac{1}{\sin^2}$ sur $]0;\pi[$ et par la question 3.e $f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ est une primitive de $\frac{1}{\sin}$ sur $\mathcal{D}_{f_2}$ donc sur $]0;\pi[$. Donc par la question précédente,

$$\boxed{\exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad z(x) = A\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + f_2(x) + B.}$$

(d) Montrons que l'on retrouve bien l'expression des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0;\pi[$ obtenues plus haut. Puisque $y = z\sin$, par la question précédente, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$,

$$\forall x \in\,]0;\pi[\,, \quad z(x) = A\cos(x) + \sin(x)f_2(x) + B\sin(x) = f_4(x) + A\cos(x) + B\sin(x).$$

Ce raisonnement d'analyse permet de retrouver le fait que si y est une solution de $(\mathcal{E})$ alors y s'écrit bien sous cette forme. Une synthèse permet de montrer que ces fonctions sont aussi toutes solutions. Conclusion, on retrouve bien l'ensemble des solutions précédemment établi :

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_4(x) + A\cos(x) + B\sin(x) \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Partie III

On introduit les fonctions G et H, définies respectivement sur les domaines $\mathcal{D}_G \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_H \subset \mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_G : \quad G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} \,\mathrm{d}\theta$$
$$\forall x \in \mathcal{D}_H : \quad H(x) = \int_0^{x} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t.$$

1. Explicitons, en le justifiant avec soin, $\mathcal{D}_G$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $\theta \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}}$ est **continue** sur **le segment** $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ comme quotient et composée de fonctions qui le sont car la fonction cos ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc $G(x)$ existe. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en conclut que

$$\boxed{\mathcal{D}_G = \mathbb{R}.}$$

2. (a) * Soit $g : u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2}$. Montrons que g est 1-lipschitzienne. La fonction g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2u\,\mathrm{e}^{-u^2}.$$

La fonction g est deux fois dérivable et l'on a de plus,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad g''(u) = -2\,\mathrm{e}^{-u^2} + 4u^2\,\mathrm{e}^{-u^2} = 2\,\mathrm{e}^{-u^2}\left(2u^2 - 1\right).$$

Dès lors, $g''(u) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 2u^2 \geqslant 1 \;\Leftrightarrow\; u \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ OU $u \leqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$. La fonction g' est donc croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. De plus,

$$\lim_{u \to -\infty} g'(u) = \lim_{u \to +\infty} g'(u) = 0 \text{ par croissance comparée}$$

enfin $g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$ et $g'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$. Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
g'	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}$	$\nearrow$	0

En particulier,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |g'(u)| \leqslant \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2} = \sqrt{2\,\mathrm{e}^{-1}} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}.$$

Or $2 < \mathrm{e}$ donc $\frac{2}{\mathrm{e}} < 1$ donc

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |g'(u)| \leqslant 1.$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$. La fonction g est continue sur $[x; y]$ (ou $[y; x]$) et dérivable sur $]x; y[$ (ou $]y; x[$). Donc par le théorème des accroissements finis, il existe $u \in\,]x; y[$ (ou $]y; x[$) tel que

$$g(x) - g(y) = g'(u)\,(x - y).$$

Donc

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |g'(u)|\,|x - y| \leqslant |x - y|,$$

ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est 1-lipschitzienne.}}$$

(b) Déduisons-en la continuité de la fonction G. Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}G(x)-G(y) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{\cos^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} g\left(\frac{x}{\cos(\theta)}\right) - g\left(\frac{y}{\cos(\theta)}\right)\mathrm{d}\theta\,.\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire (car les bornes sont dans le bon sens) et la question précédente, on obtient,

$$\begin{aligned}|G(x)-G(y)| &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|g\left(\frac{x}{\cos(\theta)}\right) - g\left(\frac{y}{\cos(\theta)}\right)\right|\mathrm{d}\theta\\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\frac{x}{\cos(\theta)} - \frac{y}{\cos(\theta)}\right|\mathrm{d}\theta\,.\end{aligned}$$

Or pour tout $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, on a $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\cos(\theta)\leqslant 1$ ou encore $1\leqslant\frac{1}{\cos(\theta)}\leqslant\sqrt{2}$. Ainsi,

$$|G(x)-G(y)|\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\,|x-y|\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,|x-y|\,.$$

Or quand y tend vers x, $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,|x-y|\longrightarrow 0$. Donc par le théorème d'encadrement, Par suite,

$$\lim_{y\to x}|G(x)-G(y)|=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \lim_{y\to x}G(y)=G(x).$$

Donc G est continue en x et ceci étant vrai pour $x\in\mathbb{R}$ quelconque, on en conclut que

$$\boxed{G \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

3. Montrons que

$$\lim_{x\to+\infty}G(x)=0.$$

Soit $x>0$. On a vu que pour tout $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $1\leqslant\frac{1}{\cos(\theta)}\leqslant\sqrt{2}$. Donc

$$1\leqslant\frac{1}{\cos^2(\theta)}\leqslant 2 \qquad\Leftrightarrow\qquad -1\geqslant-\frac{1}{\cos^2(\theta)}\geqslant-2.$$

Comme $x^2>0$,

$$-x^2\geqslant-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}\geqslant-2x^2.$$

Par croissance de la fonction exponentielle,

$$\mathrm{e}^{-x^2}\geqslant\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2(\theta)\geqslant\mathrm{e}^{-2x^2}\,.$$

Par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\theta\geqslant G(x)\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}\theta$$

ou encore

$$\frac{\pi}{4}\,\mathrm{e}^{-x^2}\geqslant G(x)\geqslant\frac{\pi}{4}\,\mathrm{e}^{-2x^2}\,.$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2}=0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}G(x)=0.}$$

4. * On admet que G est dérivable sur $\mathcal{D}_G$ et que

$$\forall x \in \mathcal{D}_G, \quad G'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{2x}{\cos^2(\theta)} \,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} \,\mathrm{d}\theta\,.$$

Plutôt facile comme question dans ce sujet junior B) Dans le sujet original, il s'agit d'un petit théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

5. (a) Explicitons $\mathcal{D}_H$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est **continue** sur $\mathbb{R}$, elle l'est notamment sur **le segment** $[0; x]$ (ou $[x; 0]$). Donc $H(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en conclut que H est définie sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathcal{D}_H = \mathbb{R}.}$$

(b) Montrons que la fonction H est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_H$. On explicitera la dérivée de H. Puisque la fonction $h : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction H est l'unique primitive de h sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. Donc H est dérivable et $H' = h$ est continue sur $\mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{H \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R},\ H'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.}$$

6. A l'aide du changement de variable $u = x\tan(\theta)$, montrons que, en tout réel x de son domaine de dérivabilité,

$$G'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2}\, H(x).$$

Soit $x \neq 0$. Posons pour tout $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $u = x\tan(\theta)$ i.e. $\theta = \arctan\left(\frac{u}{x}\right)$ car $x \neq 0$. Quand $\theta = 0$, $u = 0$ et quand $\theta = \frac{\pi}{4}$, $u = x$. De plus, la fonction $u \mapsto \arctan\left(\frac{u}{x}\right)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0; x]$ (ou $[x; 0]$) et $\mathrm{d}\theta = \frac{1/x}{1+\left(\frac{u}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}u$. D'autre part, on observe que

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta) = 1 + \left(\frac{u}{x}\right)^2.$$

Donc par le théorème de changement de variable et la question 4.

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{2x}{\cos^2(\theta)}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^x -\frac{2}{x}\left(x^2+u^2\right)\mathrm{e}^{-\left(x^2+u^2\right)}\,\frac{x}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^x -2\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= -2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Si $x = 0$, on a

$$G'(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 0\,\mathrm{d}\theta = 0 \qquad \text{et } -2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = 0.$$

La formule reste donc vraie si $x = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_G = \mathbb{R}, \quad G'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2}\,H(x).}$$

7. Montrons que la fonction H^2+G est constante et précisons la valeur de cette constante. On a vu que G et H sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la fonction H^2+G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad \left(H^2+G\right)'(x) &= 2H'(x)H(x)+G'(x)\\ &= 2\,\mathrm{e}^{-x^2}H(x)-2\,\mathrm{e}^{-x^2}H(x) \qquad \text{par la question 5.b et la précédente}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left(H^2+G\right)(x)=C$. En particulier,

$$C=\left(H^2+G\right)(0)=\left(\int_0^0 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-0}\,\mathrm{d}\theta=0+\frac{\pi}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad \left(H^2+G\right)(x)=\frac{\pi}{4}.}$$

8. Déduisons-en la valeur de l'intégrale de Gauss $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, ainsi qu'une expression simplifiée de $\lim A\to+\infty\int_0^A \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$, pour tout réel $x>0$. Par l question précédente, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$H(x)=\sqrt{\frac{\pi}{4}-G(x)}\qquad\Leftrightarrow\qquad \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{4}-G(x)}.$$

Ou encore

$$\forall A\in\mathbb{R},\quad \int_0^A \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{4}-G(A)}.$$

Or par la question 3. $\lim\limits_{A\to+\infty}G(A)=0$. Donc par continuité de la fonction $\sqrt{\cdot}$ en $\frac{\pi}{4}$, on en conclut que $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et

$$\boxed{\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Soient $x>0$ et $A>0$. Posons pour tout $t\in[0;A]$, $s=\sqrt{x}t$ i.e. $t=\frac{s}{\sqrt{x}}$ car $x\neq 0$. Si $t=0$, $s=0$ et si $t=A$, $s=\sqrt{x}A$. De plus, la fonction $s\mapsto\frac{s}{\sqrt{x}}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\sqrt{x}A]$ et $\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}s$. Par le théorème de changement de variable,

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\sqrt{x}A}\mathrm{e}^{-s^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}A}\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s.$$

Puisque $\sqrt{x}\neq 0$, $\sqrt{x}A\longrightarrow+\infty$ quand $A\to+\infty$. Donc par ce qui précède,

$$\lim A\to+\infty\int_0^A \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim A\to+\infty\int_0^A \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.}$$

Partie IV

1. * Soit $n\in\mathbb{N}$. Rappelons le développement limité en 0 de la fonction sinus à l'ordre $2n+1$:

$$\boxed{\sin(x)\underset{x\to 0}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right).}$$

2. On considère la fonction φ, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

* Montrons que φ admet un développement limité à l'ordre $2n$ en 0 que l'on précisera. Par la question précédente,

$$\varphi(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{=} \frac{\sin(x)}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

Quand $x = 0$, on a $\varphi(0) = 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^0}{1!} + 0 = 1.$$

Donc l'égalité asymptotique reste vraie en 0. Conclusion, φ admet un développement limité à l'ordre $2n$ en 0 donné par

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n}\right).}$$

3. Dans cette question, N désigne un entier strictement positif, et x est un réel quelconque. On introduit le polynôme P_N tel que :

$$P_N(X) = \left(1 - \frac{X}{\pi}\right)\left(1 + \frac{X}{\pi}\right)\left(1 - \frac{X}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{X}{2\pi}\right) \dots \left(1 - \frac{X}{N\pi}\right)\left(1 + \frac{X}{N\pi}\right).$$

Donnons α_N le coefficient de X^2 dans $P_N(X)$. On a

$$\begin{aligned} P_N(X) &= \left(1 - \frac{X^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{X^2}{4\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{X^2}{N^2\pi^2}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \dots + \frac{1}{N^2\pi^2}\right) X^2 + \dots + \frac{-1}{\pi^2} \times \frac{-1}{4\pi^2} \times \dots \times \frac{-1}{N^2\pi^2} X^{2N}. \end{aligned}$$

Dès lors, on observe que le coefficient devant X^2 est donné par

$$\alpha_N = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}.$$

4. On désigne par α le coefficient de x^2 dans le développement * limité en 0 de φ, et on suppose que :

$$\lim_{N \to +\infty} \alpha_N = \alpha.$$

Déduisons-en, * grâce au développement limité en 0 de φ, la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Par la question précédente, pour tout $N \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = -\pi^2 \alpha_N.$$

Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\pi^2 \lim_{N \to +\infty} \alpha_N = -\pi^2 \alpha.$$

Or par la question 2.

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right).$$

Donc $\alpha = -\frac{1}{6}$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

5. Déduisons la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

ainsi que celle de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Soit $N \geqslant 0$. En séparant les termes d'indice pair et les termes d'indice impair, on a

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}.$$

Or par la question précédente, les deux sommes de droite convergent quand $N \to +\infty$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

De même,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2(1-3)}{24}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

6. On pose :

$$\mathcal{D} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)^2}.$$

Calculons $2\mathcal{D} - \mathcal{C}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2(2n)+1)^2} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2(2n+1)+1)^2}\\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+1)^2} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(4n+3)^2}.\end{aligned}$$

Puisque toutes ces séries convergent (car convergent absolument par équivalence en valeur absolue avec une série de Riemann).

$$\mathcal{C} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+3)^2} = \mathcal{D} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+3)^2}.$$

Donc

$$2\mathcal{D} - \mathcal{C} = \mathcal{D} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+3)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+3)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Par la question précédente,

$$\boxed{2\mathcal{D} - \mathcal{C} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

7. On donne :

$$\frac{\pi^2}{8} = 1,2337 \pm 10^{-4}.$$

Donnons une valeur approchée de $\mathcal{D}$. *(question très vague puisque la précision n'est pas donnée,* 43 *est une valeur approchée de $\mathcal{D}$ si on veut...)* Par la question 5.b

$$\mathcal{C} = \frac{8}{9} \pm 0,04 = 0,889 \pm 0,041.$$

Par la question précédente,

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} + \mathcal{C}\right) = \frac{1}{2}(1,2337 \pm 0,0001 + 0,889 \pm 0,041) = \frac{1}{2}(2,123 \pm 0,042) = 1,06 \pm 0,03.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = 1,06 \pm 0,03.}$$

Dans ce problème, les propriétés de fonctions trigonométriques permettent d'exprimer des sommes de séries classiques - comme $\mathcal{C} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$, où $\mathcal{C}$ est la constante de Catalan - ou encore, la très classique intégrale de Gauss, dont la valeur est déterminée ici à l'aide d'intégrales à paramètres.