Epreuve de mathématiques 1
2022-2023

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 3h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Fonctions réelles

On considère la fonction
$$f : x \mapsto \frac{x}{1+\ln(x)}$$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de f.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. En déduire proprement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le tableau de variations complet de f.
5. Préciser, sans justifier, les ensembles suivants :

$$\text{a) } f\left(]0;1]\right) \text{ ?} \qquad \text{b) } f\left(\left]\mathrm{e}^{-1};\mathrm{e}\right]\right) \text{ ?} \qquad \text{c) } f^{\leftarrow}\left(\mathbb{R}_+\right) \text{ ?} \qquad \text{d) } f^{\leftarrow}\left(\mathbb{R}_-\right) \text{ ?}$$

6. Préciser le comportement asymptotique de f en $+\infty$.
7. Tracer l'allure du graphe de la fonction f.
8. Préciser l'équation de $\mathcal{T}$ la tangente à f au point $x = \mathrm{e}$.
9. Déterminer sur son domaine de définition le signe de la fonction $g : x \mapsto \frac{x}{1+\ln(x)} - \frac{x+\mathrm{e}}{4}$.
10. Préciser la position relative de $\mathcal{T}$ par rapport au graphe de f.

Problème 2 - Logique

Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les prédicats suivants :

$A(f)$: « f est convexe sur $\mathbb{R}$ »
$B(f)$: « f converge en $+\infty$ »
$C(f)$: « f est décroissante sur $\mathbb{R}$ »
$D(f)$: « f est minorée sur $\mathbb{R}$ ».

On donne/rappelle la définition de la convexité :

$$A(f) : \text{« } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1], \qquad f\left(tx + (1-t)y\right) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y). \text{ »}$$

Partie 1 : Echauffement

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Définir avec des quantificateurs les assertions $C(f)$ et $D(f)$.
2. Enoncer leur négation.
3. Enoncer une implication entre $B(f)$, $C(f)$ et $D(f)$.
4. Enoncer sa réciproque, sa négation et sa contraposée en fonction de $B(f)$, $C(f)$, $D(f)$, $\overline{B(f)}$, $\overline{C(f)}$ et/ou $\overline{D(f)}$.

5. Montrer que la réciproque est fausse en générale. Que dire de la valeur de vérité de la négation et de la contraposée ?

On pose également

$$A'(f) : \text{« } \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}. \text{ »}$$

6. Enoncer $\overline{A'(f)}$.
7. Montrer que $A(f) \Rightarrow A'(f)$.

Partie 2 : Un exemple de fonction convexe

On suppose dans cette partie que $f : x \mapsto x^2$ est la fonction carrée.

8. Donner la valeur de vérité de $B(f)$, $C(f)$, $D(f)$.

On fixe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et on pose

$$h : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & tx^2 + (1-t)\,y^2 - (tx + (1-t)y)^2 \end{array}$$

9. Montrer que
$$\exists \alpha_{x,y} \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad h(t) = \alpha_{x,y}\left(t - t^2\right),$$
où $\alpha_{x,y}$ est un réel dépendant éventuellement de x et y mais pas de t que l'on précisera.
10. Déterminer suivant les valeurs de x et y les limites de h en $+\infty$ et $-\infty$.
11. Déterminer le tableau de variations complet de h.
12. En déduire le signe de h sur $[0;1]$.
13. Conclure que la fonction carrée est convexe.

Partie 3 : Etude des fonctions convexes convergentes

On reprend f une fonction quelconque mais on suppose dans cette partie $A\,(f) \cap B\,(f)$ réalisée. On note alors $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

14. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant \ell$. Quelle assertion en déduit-on ?
15. On suppose qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ et $f(a) < f(b)$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = a + n\,(b-a)$ et $t_n = \frac{n-1}{n}$. Justifier que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(b) \leqslant t_n f(a) + (1-t_n)\, f\,(y_n)\,.$$
16. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(b) \leqslant f\,(y_n)\,.$$
17. En déduire que $f(b) \leqslant \ell$ puis aboutir à une contradiction.
18. Justifier que $A\,(f) \cap B\,(f) \Rightarrow C(f)$. Quel type de raisonnement a-t-on utilisé ?