Commentaires du DS1
Logique et fonctions réelles

Problème I - Fonctions réelles

Un ensemble très hétérogène, j'ai sous-estimé la difficulté du problème qui fait que un nombre non négligeable d'étudiants ont bloqué avant ou au moment du tableau de variation et donc ont eu faux au reste du problème. Globalement il faut gagner en rigueur, en persévérance et vérifier d'une façon ou d'une autre votre résultat pour pouvoir continuer sans s'embourber à cause d'une erreur de signe à la question 1...

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{1+\ln(x)}$$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de f.

   Question élémentaire qui ne l'a pas été autant finalement pour tout le monde. Assez peu de rédaction propre. J'ai encore été tolérant dans la gestion des variables et dans votre rédaction en général, je ne le serai plus sur les DS suivants.

2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. En déduire proprement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   Très hétérogène. Certains ont les bons réflexes, preuve d'une bonne pratique du lycée. D'autres parachutent le résultat ou brodent des phrases vagues pour essayer de convaincre le correcteur.

3. Calculer la dérivée de f.

   Impossible de se tromper ici. Attention à votre rédaction, il fallait bien préciser que f est dérivable sur son domaine de définition en tant que composée de fonctions qui le sont.

4. Déterminer le tableau de variations complet de f.

   Beaucoup ont été déstabilisé par la valeur interdite de e^{-1} au milieu du tableau. N'oubliez pas qu'un tableau de variations complet doit comprendre les limites aux bornes (et à toutes les bornes). Soyez attentifs et rigoureux : une fonction ne peut pas croître jusqu'à $-\infty$! ! ! Si vous voyez une incohérence que vous ne savez pas corriger signalez-le au correcteur plutôt que de laisser une grosse bêtise.

5. Préciser, sans justifier, les ensembles suivants :

   a) $f\left(]0;1]\right)$? b) $f\left(\left]\mathrm{e}^{-1};\mathrm{e}\right]\right)$? c) $f^{\leftarrow}\left(\mathbb{R}_+\right)$? d) $f^{\leftarrow}\left(\mathbb{R}_-\right)$?

   Notion non comprise par la plupart d'entre vous. Vous devez poser plus de questions en classe si vous ne comprenez pas et/ou mieux vous approprier ces notions en retravaillant les exemples vus en classe. Blablabla cahier fermé blabla (tout mon discours habituel) vous m'avez compris !

6. Préciser le comportement asymptotique de f en $+\infty$.

   Pas mal de bonnes réponses mais certains n'ont pas bien appris leur cours.

7. Tracer l'allure du graphe de la fonction f.

   Deux points gentils quand on a réussi les questions précédentes naturellement. D'où l'importance d'être soigneux sur les premières questions pour bien rentabiliser l'exercice.

8. Préciser l'équation de $\mathcal{T}$ la tangente à f au point $x = \mathrm{e}$.

   Beaucoup de bonnes réponses. N'hésitez pas cependant à préciser que f est dérivable en e pour que l'on puisse parler de sa tangente. Donnez bien l'équation théorique avant de faire le calcul. Quelques cafouillages pour certains malgré tout.

9. Déterminer sur son domaine de définition le signe de la fonction $g : x \mapsto \frac{x}{1+\ln(x)} - \frac{x+\mathrm{e}}{4}$.

   Question de fin de problème et donc plus dure. Face à cette augmentation de difficulté, vous avez tous séché ou manqué d'autonomie pour y parvenir. Il est très important de comprendre et de reprendre ces questions avec le corrigé si vous souhaitez progresser. Très important.

10. Préciser la position relative de $\mathcal{T}$ par rapport au graphe de f.

    Aucune bonne réponse à la question précédente et donc pas d'accès à cette question.

Problème II - Logique

Trop de réponses brodées en ce début qui n'ont rien avoir avec la rigueur mathématique et l'esprit scientifique que l'on attend de vous. Tout résultat doit être démontré. Des notions de cours insuffisamment apprises pour plusieurs. Il faut savoir nier et parler de contraposée et réciproque sans hésiter. Une partie 3 bien plus technique que personne n'a su réellement aborder.

Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les prédicats suivants :

$$A(f) : \text{« } f \text{ est convexe sur } \mathbb{R} \text{ »}$$
$$B(f) : \text{« } f \text{ converge en } +\infty \text{ »}$$
$$C(f) : \text{« } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R} \text{ »}$$
$$D(f) : \text{« } f \text{ est minorée sur } \mathbb{R} \text{ ».}$$

On donne/rappelle la définition de la convexité :

$$A(f) : \text{« } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1], \qquad f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y). \text{ »}$$

Partie 1 : Echauffement

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Définir avec des quantificateurs les assertions $C(f)$ et $D(f)$.

   Pour $C(f)$, des confusions entre croissante, décroissante, strictement décroissante. Bien faire apparaître l'implication. Ne pas confondre une inégalité large avec une inégalité stricte. Pour $D(f)$ malgré mes mises en garde en cours (il faut toujours boire mes paroles) la moitié de la classe a inversé l'ordre des quantificateurs ce qui rend l'assertion toujours vraie et rien à voir avec le fait d'être minorée.

2. Enoncer leur négation.

   Facile mais pas toujours réussie. J'ai mis des points en cas de cohérence ici. Attention à bien savoir nier une implication et à bien gérer tous les quantificateurs.

3. Enoncer une implication entre $B(f)$, $C(f)$ et $D(f)$.

   Une réponse doit être rédigée !!! Plus le résultat est rapide plus votre rédaction doit être détaillée. On attendait ici de citer le théorème de convergence monotone. N'oubliez pas d'encadrer vos résultats, je serai plus sévère à l'avenir.

4. Enoncer sa réciproque, sa négation et sa contraposée en fonction de $B(f)$, $C(f)$, $D(f)$, $\overline{B(f)}$, $\overline{C(f)}$ et/ou $\overline{D(f)}$.

   C'est du cours et pourtant ce n'est pas toujours acquis, dommage, c'était 1,5 point gratuit. Deux ou trois étudiants n'ont pas respecté la consigne de tout exprimer en fonction de $B(f)$, $C(f)$, $D(f)$, $\overline{B(f)}$, $\overline{C(f)}$ et/ou $\overline{D(f)}$ uniquement.

5. Montrer que la réciproque est fausse en générale. Que dire de la valeur de vérité de la négation et de la contraposée ?

   Peu de belles réponses. Pour montrer que la réciproque n'est pas vraie pour tous les f, il faux montrer que pour un f (au moins) elle est fausse. Un contre-exemple précis était attendu. Des phrases comme « c'est pas toujours vrai » ne suffisaient pas. En particulier avec des « on peut aussi avoir des fonctions croissantes » n'est pas clair du tout. Je rappelle (car je l'ai déjà dit) qu'une fonction peut être croissante ET décroissante : c'est le cas des fonctions constantes ! Donc une fonction constante n'était pas un contre-exemple. Pour la valeur de vérité de la négation et de la contraposée, la réponse était immédiate mais rarement clair ou bien rédigée dans vos copies.

On pose également

$$A'(f) : \text{« } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}. \text{ »}$$

6. Enoncer $\overline{A'(f)}$.

   Cadeau et bien réussie.

7. Montrer que $A(f) \Rightarrow A'(f)$.

   Il suffisait de prendre $t = 1/2$ dans $A(f)$. Là aussi rédigez avec soin. Pour montrer $A \Rightarrow B$, on suppose A et on essaye de démontrer B. Il fallait donc commencer la rédaction par supposer $A(f)$. Puis dire que $1/2 \in [0;1]$ et que donc en particulier on pouvait prendre $t = 1/2$.

Partie 2 : Un exemple de fonction convexe

On suppose dans cette partie que $f : x \mapsto x^2$ est la fonction carrée.

8. Donner la valeur de vérité de $B(f)$, $C(f)$, $D(f)$.

   Plutôt bien réussie. Justifier un minimum vos réponses.

On fixe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et on pose

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & tx^2 + (1-t)\,y^2 - (tx + (1-t)y)^2 \end{array}$$

9. Montrer que

   $$\exists \alpha_{x,y} \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad h(t) = \alpha_{x,y}\left(t - t^2\right),$$

   où $\alpha_{x,y}$ est un réel dépendant éventuellement de x et y mais pas de t que l'on précisera.

   Un tout petit peu de calculs... ce qui a laissé pourtant sur le carreau trop d'entre vous ! Quelques bonnes réponses cependant. Résultat important car la suite en dépendait.

10. Déterminer suivant les valeurs de x et y les limites de h en $+\infty$ et $-\infty$.

    Il fallait penser au cas où $\alpha_{x,y} = 0$. Ne pas se tromper sur le calcul de la limite qu'il est bon aussi de justifier un minimum.

11. Déterminer le tableau de variations complet de h.

    Dépendait des questions précédentes. Quelques bonnes réponses cependant.

12. En déduire le signe de h sur $[0;1]$.

    Ok pour les quelques-uns arrivés jusque là sans erreur.

13. Conclure que la fonction carrée est convexe.

    Bizarrement puisque c'est la dernière question de la partie beaucoup lâchent l'affaire alors qu'elle n'est pas si dure ! A bien reprendre avec le corrigé.

Partie 3 : Etude des fonctions convexes convergentes

On reprend f une fonction quelconque mais on suppose dans cette partie $A(f) \cap B(f)$ réalisée. On note alors $\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

14. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant \ell$. Quelle assertion en déduit-on ?

    Enormément de réponses de la forme : « puisque f est convexe et convergente alors l'énoncé doit dire vrai. Je parachute un truc que je sais en plus c'est que la fonction étant convexe elle est au-dessus de ses tangentes histoire de noyer le poisson et de faire bien auprès du correcteur même si je ne comprends pas du tout le lien avec la réponse et j'affirme avec aplomb que j'ai bien répondu... » Approche à bannir et qui ne rapportait bien sûr aucun point. Une bonne réponse max dans toute la classe.

15. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ et $f(a) < f(b)$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = a + n(b - a)$ et $t_n = \frac{n-1}{n}$. Justifier que

    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(b) \leqslant t_n f(a) + (1 - t_n) f(y_n).$$

    Non comprise, non réussie mais là aussi plusieurs broderies absurdes.

16. En déduire que

    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(b) \leqslant f(y_n).$$

    Non réussie.

17. En déduire que $f(b) \leqslant \ell$ puis aboutir à une contradiction.

    Non réussie.

18. Justifier que $A(f) \cap B(f) \Rightarrow C(f)$. Quel type de raisonnement a-t-on utilisé ?

    J'ai généreusement mis 0,5 pour la citation du raisonnement par l'absurde mais cela manquait quand même cruellement de rédaction. Le premier morceau de la question n'a été réussie par personne.