Corrigé du Devoir Surveillé 1
Logique et fonctions réelles

Problème I - Fonctions réelles

On considère la fonction
$$f : x \mapsto \frac{x}{1+\ln(x)}$$

1. Soit $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} x \in \mathscr{D}_f &\Leftrightarrow f(x) \text{ existe} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\ln(x) \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) \neq -1 \\ x > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \mathrm{e}^{-1} \\ x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{D}_f = \left]0; \mathrm{e}^{-1}\right[\cup \left]\mathrm{e}^{-1}; +\infty\right[.}$$

2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Pour tout $x > \mathrm{e}^{-1}$, on a
$$f(x) = \frac{x}{1+\ln(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}} \qquad \text{car } x \neq 0.$$
Or $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ et $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$. Donc par somme,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 0^+.$$
Par passage à l'inverse,
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

3. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme composée de fonctions qui le sont. Donc f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f'(x) = \frac{1+\ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(1+\ln(x))} = \frac{\ln(x)}{(1+\ln(x))^2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \left]0; \mathrm{e}^{-1}\right[\cup \left]\mathrm{e}^{-1}; +\infty\right[, \qquad f'(x) = \frac{\ln(x)}{(1+\ln(x))^2}.}$$

4. Soit $x \in \mathscr{D}_f$. On a les équivalences suivantes :
$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(x)}{(1+\ln(x))^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) > 0.$$

En effet, pour $x \in \mathscr{D}_f$, $1+\ln(x) \neq 0$ donc $(1+\ln(x))^2 > 0$. Ainsi, $f'(x) > 0 \iff x > 1$ et de même, $f'(x) < 0 \iff x < 1$. Comme $\mathrm{e}^{-1} < 1$, la fonction f est donc strictement décroissante sur $\left]0; \mathrm{e}^{-1}\right[$ et sur $\left]\mathrm{e}^{-1}; 1\right]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{1+\ln(x)} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{1+\ln(x)} = 0 \times 0 = 0.$$

De plus par la question 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Puis

$$\lim_{\substack{x\to \mathrm{e}^{-1}\\ x<\mathrm{e}^{-1}}} 1+\ln(x) = 0^-$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to \mathrm{e}^{-1}\\ x<\mathrm{e}^{-1}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to \mathrm{e}^{-1}\\ x<\mathrm{e}^{-1}}} \frac{x}{1+\ln(x)} = \mathrm{e}^{-1} \times -\infty = -\infty.$$

De même $\lim\limits_{\substack{x\to \mathrm{e}^{-1}\\ x>\mathrm{e}^{-1}}} f(x) = +\infty$. Enfin, $f(1) = \frac{1}{1+0} = 1$. Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. Par lecture du tableau de variations, on obtient :

$$\text{a)}\ \boxed{f\left(]-\infty; 1]\right) =]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[\,.}$$

Puisque $\mathrm{e} > 1$, on obtient

$$\text{b)}\ \boxed{f\left(\left[\mathrm{e}^{-1}; \mathrm{e}\right]\right) = [1; +\infty[\cup [1; f(\mathrm{e})] = [1; +\infty[\,.}$$

Puisque 0 au début du tableau n'est pas atteint, on a ensuite,

$$\text{c)}\ \boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}_+) = \left]\mathrm{e}^{-1}; +\infty\right[\,.}$$

De même,

$$\text{d)}\ \boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}_-) = \left]0; \mathrm{e}^{-1}\right[\,.}$$

6. On sait déjà que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. On a pour tout $x > \mathrm{e}^{-1}$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1+\ln(x)}.$$

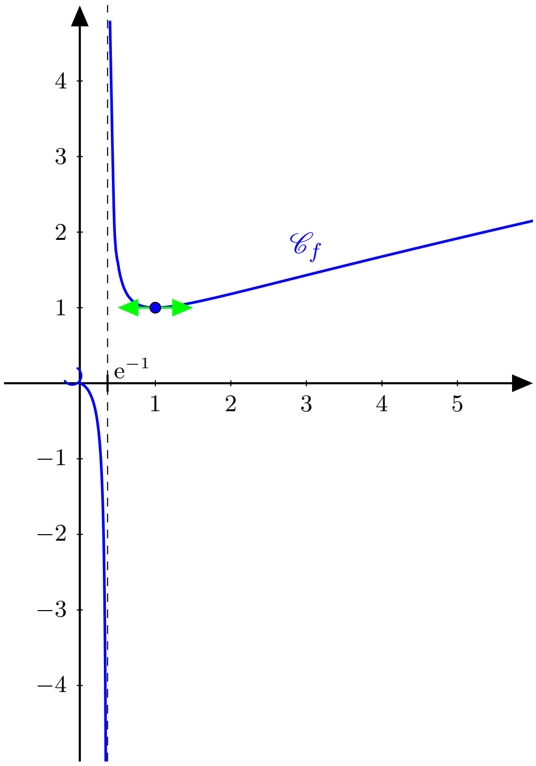
Donc directement,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ n'admet pas d'asymptote au voisinage de } +\infty \text{ mais une branche parabolique de direction } (Ox).}$$

7. On obtient le graphe suivant :



Attention, il semble y avoir une asymptote oblique sur ce schéma ceci est une illusion du fait que l'impact du logarithme qui vient aplatir la courbe ne se fait sentir que pour les valeurs de x bien plus grandes.

8. Montrons que f n'est pas injective. Posons $y = 2$. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left]\mathrm{e}^{-1}; 1\right]$ donc par le théorème de la bijection, f définit une bijection de $\left]\mathrm{e}^{-1}; 1\right]$ dans $\left[f(1); \lim_{(\mathrm{e}^{-1})^+} f\right[= [1; +\infty[$. Or $y = 2 \in [1; +\infty[$, donc par le théorème de la bijection, il existe (un unique) $x_1 \in \left]\mathrm{e}^{-1}; 1\right]$ tel que $f(x_1) = y$. De même, f est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc toujours par le théorème de la bijection, $f([1; +\infty[) = [f(1); \lim_{+\infty} f[= [1; +\infty[$. Or $y \in [1; +\infty[$ donc il existe (un unique) $x_2 \in [1; +\infty[$ tel que $f(x_2) = y$. On observe que $f(1) = 1 \neq 2$ donc $x_1 \neq 1$ et $x_2 \neq 2$. Donc $x_1 < 1 < x_2$ et finalement $x_1 \neq x_2$ et pourtant $f(x_1) = 2 = f(x_2)$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$$

Par ce qui précède, pour tout $x \in \left]0; \mathrm{e}^{-1}\right[$, $f(x) < 0$ et pour tout $x \in \left]\mathrm{e}^{-1}; +\infty\right[$, $f(x) \geqslant 1$. Notamment, pour tout $x \in \left]0; \mathrm{e}^{-1}\right[\cup \left]\mathrm{e}^{-1}; +\infty\right[$, $f(x) \neq \frac{1}{2}$ par exemple. Donc $1/2$ n'a aucun antécédent pas f. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ n'est pas surjective.}}$$

La fonction f n'étant ni injective ni surjective, a fortiori,

$$\boxed{f \text{ n'est pas bijective.}}$$

9. La fonction f est continue sur son domaine de définition comme composée de fonctions qui le sont. Donc f est continue sur $[1; +\infty[$. De plus, par ce qui précède, f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Donc par le théorème de la bijection, f définit une bijection de $[1;+\infty[$ dans $[f(1);\lim_{+\infty} f[=[1;+\infty[$. Conclusion,

$$\boxed{f: \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \to & [1;+\infty[\\ x & \mapsto & \frac{x}{1+\ln(x)} \end{array} \quad \text{est une bijection.}}$$

10. Puisque f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$, elle l'est notamment en e et donc admet bien une tangente $\mathcal{T}$ à ce point. De plus, l'équation de $\mathcal{T}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{T}: \qquad y &= f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + f(\mathrm{e}) \\ &= \frac{\ln(\mathrm{e})}{(1+\ln(\mathrm{e}))^2}(x-\mathrm{e}) + \frac{\mathrm{e}}{1+\ln(\mathrm{e})} \\ &= \frac{1}{4}(x-\mathrm{e}) + \frac{\mathrm{e}}{2} \\ &= \frac{x+\mathrm{e}}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'équation de la tangente à f au point $x=\mathrm{e}$ est

$$\boxed{\mathcal{T}: \qquad y = \frac{x+\mathrm{e}}{4}.}$$

11. Soit $x\in\mathbb{R}$. On observe que lorsque $g(x)$ existe, on a $g(x)=f(x)-\frac{x+\mathrm{e}}{4}$. Or $x\mapsto\frac{x+\mathrm{e}}{4}$ est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est définie et même dérivable sur $\mathscr{D}_f=\left]0;\mathrm{e}^{-1}\right[\cup\left]\mathrm{e}^{-1};+\infty\right[$. Donc par différence, la fonction g est définie et même dérivable sur $\mathscr{D}_f$. De plus,

$$\begin{aligned} \forall x\in\mathscr{D}_f, \qquad g'(x) &= f'(x) - \frac{1}{4} \\ &= \frac{\ln(x)}{(1+\ln(x))^2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{4\ln(x) - (1+\ln(x))^2}{4(1+\ln(x))^2} \\ &= \frac{4\ln(x) - \ln^2(x) - 2\ln(x) - 1}{4(1+\ln(x))^2} \\ &= -\frac{\ln^2(x) - 2\ln(x) + 1}{4(1+\ln(x))^2} \\ &= -\frac{(\ln(x)-1)^2}{4(1+\ln(x))^2}. \end{aligned}$$

En tant que l'opposé d'un carré, on en déduit que

$$\forall x\in\mathscr{D}_f, \qquad g'(x)\leqslant 0.$$

Donc la fonction g est décroissante sur $\left]0;\mathrm{e}^{-1}\right[$ ainsi que sur $\left]\mathrm{e}^{-1};+\infty\right[$. De plus, à l'aide des limites de f, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) - \frac{x+\mathrm{e}}{4} = 0 - \frac{\mathrm{e}}{4} = -\frac{\mathrm{e}}{4} \\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<\mathrm{e}^{-1}}} g(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<\mathrm{e}^{-1}}} f(x) - \frac{x+\mathrm{e}}{4} = -\infty \\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>\mathrm{e}^{-1}}} g(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>\mathrm{e}^{-1}}} f(x) - \frac{x+\mathrm{e}}{4} = +\infty \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+\ln(x)} - \frac{x+\mathrm{e}}{4} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x-(1+\ln(x))\,(x+\mathrm{e})}{4\,(1+\ln(x))} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x\ln(x)+3x-\mathrm{e}\ln(x)-\mathrm{e}}{4\,(1+\ln(x))} \\
&= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x\ln(x)}{4\ln(x)} \frac{1-\frac{3}{\ln(x)}+\frac{\mathrm{e}}{x}+\frac{\mathrm{e}}{x\ln(x)}}{1+\frac{1}{\ln(x)}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{4} \frac{1-\frac{3}{\ln(x)}+\frac{\mathrm{e}}{x}+\frac{\mathrm{e}}{x\ln(x)}}{1+\frac{1}{\ln(x)}} \\
&= -\infty \times \frac{1+0}{1+0} = -\infty.
\end{aligned}$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
g	$-\frac{\mathrm{e}}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

Or

$$g(\mathrm{e}) = \frac{\mathrm{e}}{1+\ln(\mathrm{e})} - \frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}}{4} = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2} = 0.$$

Donc

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
g	$-\frac{\mathrm{e}}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On en déduit alors le tableau de signe suivant :

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

NB : il n'était pas indispensable du tout de calculer les limites au voisinages de e *ou* $+\infty$*, on pouvait simplement écrire le tableau de variation suivant, il suffisait pour obtenir le signe de* g *:*

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
g	$-\frac{\mathrm{e}}{4}$	$\searrow$	‖	$\searrow$	0	$\searrow$	

Déterminer sur son domaine de définition le signe de la fonction $g : x \mapsto \frac{x}{1+\ln(x)} - \frac{x+\mathrm{e}}{4}$.

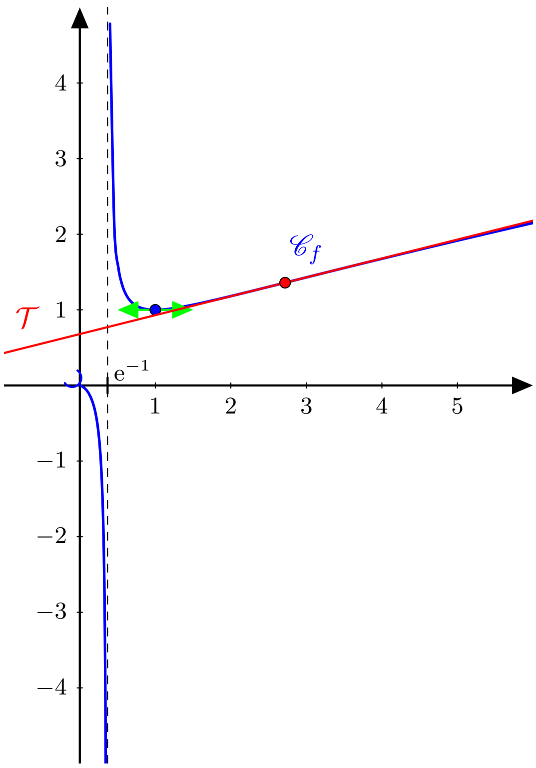
12. Notons $\mathscr{C}_f$ le graphe de f. Soit $x \in \mathscr{D}_f$. Par les questions précédentes, on a

$$\mathscr{C}_f \text{ au dessus de } \mathcal{T} \text{ en } x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geqslant \frac{x+\mathrm{e}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - \frac{x+\mathrm{e}}{4} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \geqslant 0.$$

Cela signifie aussi que $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{T}$ en x si et seulement si $g(x) \leqslant 0$. Donc par la question précédente :

$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de la tangente } \mathcal{T} \text{ sur } \left]0;\mathrm{e}^{-1}\right[\cup \left]\mathrm{e};+\infty\right[\text{ au contraire au-dessus sur } \left]\mathrm{e}^{-1};\mathrm{e}\right[.}$

Naturellement, il est logique que $g(x) = 0$ pour $x = \mathrm{e}$ puisque $\mathcal{T}$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point. Pensez à vérifier également que cela est cohérent, ou au moins n'est pas en contradiction, avec votre dessin précédent.



Problème II - Logique

Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les prédicats suivants :

$$\begin{aligned} &A(f) : \text{« } f \text{ est convexe sur } \mathbb{R} \text{ »} \\ &B(f) : \text{« } f \text{ converge en } +\infty \text{ »} \\ &C(f) : \text{« } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R} \text{ »} \\ &D(f) : \text{« } f \text{ est minorée sur } \mathbb{R} \text{ ».} \end{aligned}$$

On donne/rappelle la définition de la convexité :

$$A(f) : \text{« } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1], \qquad f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y). \text{ »}$$

Partie 1 : Echauffement

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On a, pour la décroissance sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{C(f) : \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant f(y)).}$$

   Pour la minoration sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{D(f) : \qquad \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant m.}$$

2. La négations respectives sont données par

$$\boxed{\overline{C(f)} : \qquad \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \leqslant y \text{ et } f(x) < f(y).}$$

   Notamment on voit que cela ne peut pas se réaliser avec $x = y$, on peut donc remplacer dans l'assertion $x \leqslant y$ par $x < y$.

$$\boxed{\overline{D(f)} : \qquad \forall m \in \mathbb{R},\ \exists x_m \in \mathbb{R}, \quad f(x_m) < m.}$$

3. Par le théorème de convergence monotone, toute fonction minorée et décroissante converge :

$$\boxed{(C(f) \ \text{ET}\ D(f)) \ \Rightarrow\ B(f).}$$

4. La réciproque est donnée par

$$\boxed{B(f) \ \Rightarrow\ (C(f) \ \text{ET}\ D(f)).}$$

   La négation est donnée par

$$\boxed{C(f) \ \text{ET}\ D(f) \ \text{ET}\ \overline{B(f)}.}$$

   Enfin la contraposée est donnée par

$$\boxed{\overline{B(f)} \ \Rightarrow\ \left(\overline{C(f)} \ \text{OU}\ \overline{D(f)}\right).}$$

5. Montrons que la réciproque n'est pas toujours vraie i.e.

$$[\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ B(f) \ \Rightarrow\ (C(f) \ \text{ET}\ D(f))] \text{ est fausse.}$$

   Ou encore que

$$\exists f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ B(f) \ \text{ET}\ \left(\overline{C(f)} \ \text{OU}\ \overline{D(f)}\right) \text{ est vraie.}$$

Cela revient à trouver un contre-exemple à la réciproque. On doit donc trouver une fonction f qui converge en $+\infty$ mais qui n'est pas décroissante ou qui ne soit pas minorée, au choix. Posons $f : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$. Alors $-x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et donc $\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Donc f converge en $+\infty$. Cependant, si $x = 0$ et $y = 1$, alors $-x < -y$ et donc par la stricte croissance de la fonction exponentielle, $\mathrm{e}^{-x} > \mathrm{e}^{-y}$ d'où $f(x) = -\mathrm{e}^{-x} < -\mathrm{e}^{-y} = f(y)$. Donc f n'est pas décroissante (et même f est strictement décroissante. Attention rappelons qu'une fonction décroissante n'implique pas qu'elle ne soit pas croissante ! ! ! La fonction nulle est croissante ET décroissante à la fois, par contre la **stricte** croissance empêche la décroissance). Mieux ! La fonction f n'est pas non plus minorée car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (il suffisait juste la non décroissance ou la non minoration mais ici f remplie les deux conditions). Conclusion,

$$\boxed{\text{la réciproque est fausse pour } f : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}.}$$

Puisque l'implication d'origine $(C(f)$ ET $D(f)) \Rightarrow B(f)$ est vraie, on en déduit nécessairement que $\boxed{\text{sa négation est toujours fausse}}$ tandis que $\boxed{\text{sa contraposée est toujours vraie}}$.

On pose également

$$A'(f) : \text{« } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}. \text{ »}$$

6. La négation de $A'(f)$ est donnée par

$$\boxed{\overline{A'(f)} : \qquad \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}.}$$

7. On veut montrer que $A(f) \Rightarrow A'(f)$. Supposons donc $A(f)$ vraie et démontrons alors que $A'(f)$ l'est également. Puisque $A(f)$ est vraie, par définition,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1], \qquad f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Prenons $t = 1/2$. Alors, $t \in [0;1]$ et donc par la proposition précédente,

$$f\left(\frac{1}{2}x + \left(1-\frac{1}{2}\right)y\right) \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \left(1-\frac{1}{2}\right)f(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Ce qui démontre $A'(f)$. Conclusion,

$$\boxed{A(f) \Rightarrow A'(f).}$$

Partie 2 : Un exemple de fonction convexe

On suppose dans cette partie que $f : x \mapsto x^2$ est la fonction carrée.

8. La fonction carrée diverge vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$. Donc

$$\boxed{B(f) \text{ est fausse.}}$$

La fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ mais croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{C(f) \text{ est fausse.}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x^2 \geqslant 0$. Donc 0 est un minorant de la fonction f donc f est minorée (et même admet un minimum) :

$$\boxed{D(f) \text{ est vraie.}}$$

On fixe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et on pose

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & tx^2 + (1-t)\,y^2 - (tx + (1-t)y)^2 \end{array}$$

9. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(t) &= tx^2 + (1-t)\,y^2 - (tx + (1-t)y)^2 \\ &= tx^2 + y^2 - ty^2 - t^2x^2 - 2t\,(1-t)\,xy - (1-t)^2\,y^2 \\ &= tx^2 + y^2 - ty^2 - t^2x^2 - 2txy + 2t^2xy - y^2 + 2ty^2 - t^2y^2 \\ &= -t^2\left(x^2 - 2xy + y^2\right) + t\left(x^2 - y^2 - 2xy + 2y^2\right) + y^2 - y^2 \\ &= -\,(x-y)^2\,t^2 + t\left(x^2 - 2xy + y^2\right) \\ &= -\,(x-y)^2\,t^2 + t\,(x-y)^2 \\ &= (x-y)^2\left(t - t^2\right). \end{aligned}$$

Conclusion, en posant $\boxed{\alpha_{x,y} = (x-y)^2}$, on obtient,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad h(t) = \alpha_{x,y}\left(t - t^2\right).}$$

10. Premier cas, $x \neq y$ alors $(x-y)^2 > 0$. Dans ce cas,

$$\forall t \neq 0, \qquad h(t) = (x-y)^2\,t^2\left(-1 + \frac{1}{t}\right).$$

Puisque $t^2 \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$, que $-1 + \frac{1}{t} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} -1$ et que $(x-y)^2 > 0$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{t\to-\infty} h(t) = +\infty.}$$

Second cas, si $x = y$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{t\to-\infty} h(t) = 0.}$$

11. Supposons $x \neq y$, par ce qui précède, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = (x-y)^2\left(t - t^2\right)$. Donc la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad h'(t) = (x-y)^2\,(1 - 2t).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$h'(t) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 - 2t > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t < \frac{1}{2} \qquad\qquad \text{car } (x-y)^2 > 0.$$

Donc la fonction h est strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$. De même $h'(t) < 0 \iff t > \frac{1}{2}$ et h est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Enfin, $h\left(\frac{1}{2}\right) = (x-y)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{(x-y)^2}{4}$. Ainsi, lorsque $x \neq y$,

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
h	$+\infty$ ↘	$\frac{(x-y)^2}{4}$	↗ $+\infty$

Second cas, $x = y$, alors la fonction h est identiquement nulle et est notamment constante sur $\mathbb{R}$.

12. Par la question précédente, si $x \neq y$, on note que $\frac{(x-y)^2}{4}$ est le minimum de h sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) \geqslant 0$. Ceci reste vraie si $x = y$. Dans tous les cas, h est positive sur $\mathbb{R}$ et donc notamment sur $[0;1]$:
$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1], \qquad h(t) \geqslant 0.}$$

13. Par la question précédente et la définition de h, on a
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1], \qquad tx^2 + (1-t)\,y^2 - (tx + (1-t)y)^2 \geqslant 0.$$
Autrement dit,
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1], \qquad tx^2 + (1-t)\,y^2 \geqslant (tx + (1-t)y)^2\,.$$
Ou encore,
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1], \qquad tf(x) + (1-t)\,f(y) \geqslant f\,(tx + (1-t)y)\,.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{la fonction carrée } f \text{ est convexe.}}$$

Partie 3 : Etude des fonctions convexes convergentes

On reprend f une fonction quelconque mais on suppose dans cette partie $A\,(f) \cap B\,(f)$ réalisé. On note alors $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

14. Par hypothèse, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$ et convergente en $+\infty$. Donc
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1], \qquad tf(x) + (1-t)\,f(y) \geqslant f\,(tx + (1-t)y)\,.$$
Puisque cette assertion est vraie pour tous les y, on peut faire tendre $y \to +\infty$. Dans ce cas, pour tout $t \in [0;1[$, $tx + (1-t)\,y \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0;1[$,
$$\lim_{y\to+\infty} f\,(tx + (1-t)y) = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to+\infty} tf(x) + (1-t)\,f(y) = tf(x) + (1-t)\,\ell.$$
Ainsi par passage à la limite quand $y \to +\infty$ dans $A\,(f)$, on obtient,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0;1[\,, \qquad tf(x) + (1-t)\,\ell \geqslant \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0;1[\,, \qquad tf(x) \geqslant t\ell.$$
Ceci étant vrai pour tout $t \in [0;1[$, on peut prendre $t = 1/2$:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{f(x)}{2} \geqslant \frac{\ell}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \geqslant \ell.}$$
On en déduit que f est minorée par ℓ et donc en particulier :
$$\boxed{D\,(f)\ \text{ est vraie.}}$$

15. On suppose qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ et $f(a) < f(b)$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = a + n\,(b-a)$ et $t_n = \frac{n-1}{n}$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $x = a$, $y = y_n$ et $t = t_n$. Comme $0 \leqslant n-1 \leqslant n$ et que $n > 0$, on a $0 \leqslant \frac{n-1}{n} \leqslant 1$. Donc on a bien $t_n \in [0;1]$. Donc par $A\,(f)$,
$$tf(x) + (1-t)\,f(y) \geqslant f\,(tx + (1-t)\,y) \qquad \Leftrightarrow \qquad t_nf(a) + (1-t_n)\,f\,(y_n) \geqslant f\,(t_na + (1-t_n)\,y_n)\,.$$

Or

$$\begin{aligned} t_n a + (1 - t_n)\, y_n &= \frac{n-1}{n} a + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)(a + n\,(b-a)) \\ &= a + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) n\,(b-a) \\ &= a + \frac{1}{n} \times n\,(b-a) \\ &= b. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad t_n f(a) + (1-t_n)\, f(y_n) \geqslant f(b).}$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente, $t_n f(a) + (1-t_n)\, f(y_n) \geqslant f(b)$. Or par hypothèse $f(a) < f(b)$. Donc

$$f(b) \leqslant t_n f(a) + (1-t_n)\, f(y_n) \leqslant t_n f(b) + (1-t_n)\, f(y_n) \qquad \text{CAR } t_n \geqslant 0$$

Donc

$$(1-t_n)\, f(b) \leqslant (1-t_n)\, f(y_n)\,.$$

Or $n-1 < n$ et $n > 0$, donc $t_n = \frac{n-1}{n} < 1$. Donc $1 - t_n > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(b) \leqslant f(y_n)\,.}$$

17. Puisque $f(a) < f(b)$, il est clair que $a \neq b$. Or $a \leqslant b$ donc $a < b$. Donc $b - a > 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} a + n\,(b-a) = +\infty.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{u\to+\infty} f(u) = \ell.$$

Donc par passage à la limite dans l'inégalité de la question précédente, on obtient

$$f(b) \leqslant \ell.$$

Or par la question 14. on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant \ell$. Donc $f(a) \geqslant \ell$. Ainsi,

$$\ell \leqslant f(a) < f(b) \leqslant \ell.$$

Ainsi $\boxed{\ell < \ell \text{ ce qui est contradictoire}}$.

18. On a supposé au début de la partie que $A\,(f) \cap B\,(f)$ est vraie. Puis nous avons supposé l'assertion suivante :

$$\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b,\ \text{tel que } f(a) < f(b)$$

et démontré qu'elle aboutissait à une absurdité. Donc cette assertion est fausse et donc sa négation

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad a \leqslant b \ \Rightarrow\ f(a) \geqslant f(b)$$

est vraie. Autrement dit la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$ i.e. $C(f)$ est vraie. Conclusion,

$$\boxed{A\,(f) \cap B\,(f) \ \Rightarrow\ C(f).}$$

Nous avons supposé $C\,(f)$ fausse et démontré que cela était impossible i.e.

$\boxed{\text{nous avons utilisé un raisonnement par l'absurde}}$.

Partie 4 : Une récurrence alternative

On fixe dans cette partie $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction **convexe** sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n} \text{ ».}$$

19. Si $n=1$, on a

$$\mathscr{P}(1) : \text{« } \forall x_1 \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x_1}{1}\right) \leqslant \frac{f(x_1)}{1} \text{ »}$$

qui est bien entendu toujours vrai (et ce même si f n'est pas convexe). Si $n=2$, on a

$$\mathscr{P}(2) : \text{« } \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ ».}$$

On reconnaît alors $A'(f)$. Or on a supposé f convexe i.e. $A(f)$ vraie. Donc par 7. on sait que $A'(f)$ est vraie i.e. $\mathscr{P}(2)$ est vraie. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{P}(1) \text{ et } \mathscr{P}(2) \text{ sont vraies.}}$$

20. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k+1)$ vraie. Soient $(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k$. Posons

$$x_{k+1} = \frac{x_1+\cdots+x_k}{k}.$$

(a) On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{x_1+\cdots+x_{k+1}}{k+1} &= \frac{x_1+\cdots+x_k+\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}}{k+1}\\ &= \frac{kx_1+\cdots+kx_k+x_1+\cdots+x_k}{k(k+1)}\\ &= \frac{(k+1)x_1+\cdots+(k+1)x_k}{k(k+1)}\\ &= \frac{x_1+\cdots+x_k}{k}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{x_1+\cdots+x_{k+1}}{k+1} = \frac{x_1+\cdots+x_k}{k} = x_{k+1}.}$$

(b) Puisque l'on a supposé $\mathscr{P}(k+1)$, on a

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_k)+f(x_{k+1})}{k+1}.$$

Par la question précédente, on en déduit directement que

$$\boxed{f\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_k)+f\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right)}{k+1}.}$$

(c) Par la question précédente, comme $k+1 \neq 0$,

$$\begin{aligned}&(k+1)f\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right) \leqslant f(x_1)+\cdots+f(x_k)+f\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right)\\ \Leftrightarrow\quad & kf\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right) \leqslant f(x_1)+\cdots+f(x_k)\\ \Leftrightarrow\quad & f\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_k)}{k} \qquad \text{car } k \neq 0.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{P}(k) \text{ est vraie.}}$$

21. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1; m]\!]$, on pose $\mathscr{Q}(k) = \mathscr{P}(m-k+1)$. On suppose $\mathscr{P}(m)$ vraie i.e. $\mathscr{Q}(1) = \mathscr{P}(m-1+1) = \mathscr{P}(m)$ est vraie. Soient $k \in [\![1; m]\!]$ et $i \in \mathbb{N}$, on a $k = m-i+1 \Leftrightarrow i = m-k+1$. Donc quand k décrit $[\![1; m]\!]$, i décrit $[\![1; m]\!]$ également (mais dans l'autre sens). On veut montrer pour tout $k \in [\![1; m]\!]$, $\mathscr{P}(k) = \mathscr{Q}(m-k+1)$ i.e on veut montrer pour tout $i \in [\![1; m]\!]$, $\mathscr{Q}(i)$. Supposons $m \geqslant 2$, sinon le résultat est immédiat. Procédons par récurrence.

    Initialisation. Si $i = 1$, alors par hypothèse, $\mathscr{Q}(1) = \mathscr{P}(m)$ est vraie.

    Hérédité. Soit $i \in [\![1; m-1]\!]$ (possible car $m \geqslant 2$). Montrons $\mathscr{Q}(i) \Rightarrow \mathscr{Q}(i+1)$. Supposons $\mathscr{Q}(i) = \mathscr{P}(m-i+1)$ vraie. Alors par la question précédente avec $k = m-i$, on en déduit que $\mathscr{P}(m-i) = \mathscr{P}(m-(i+1)+1) = \mathscr{Q}(i+1)$ est aussi vraie.

    Conclusion, pour tout $i \in [\![1; m]\!]$, $\mathscr{Q}(i)$ est vraie ou encore pour tout $k \in [\![1; m]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

    Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{P}(m) \qquad \Rightarrow \qquad (\forall k \in [\![1; m]\!],\ \mathscr{P}(k)).}$$

22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(2n)$ l'est également i.e. par définition, pour tout $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, montrons que
$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n + \cdots + x_{2n}}{2n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n) + f(x_{2n})}{2n}.$$
    Fixons $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Posons $y_1 = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ et $y_2 = \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}$. Alors,
$$\frac{x_1 + \cdots + x_n + \cdots + x_{2n}}{2n} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$
    Donc par $\mathscr{P}(2)$, qui a été vérifiée à la question 19. :
$$f\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2}.$$
    Autrement dit,
$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n + \cdots + x_{2n}}{2n}\right) \leqslant \frac{f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) + f\left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)}{2}.$$
    En utilisant $\mathscr{P}(n)$ pour $f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$ et $f\left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)$, on obtient
$$\begin{aligned} & f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n + \cdots + x_{2n}}{2n}\right) \leqslant \frac{\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n} + \frac{f(x_{n+1})+\cdots+f(x_{2n})}{n}}{2} \\ \Rightarrow \qquad & f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n + \cdots + x_{2n}}{2n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n) + \cdots + f(x_{2n})}{2n} \end{aligned}$$
    Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{P}(n) \ \Rightarrow\ \mathscr{P}(2n).}$$

23. Procédons à nouveau par récurrence.

    Initialisation. Si $n = 1$, alors par 19. $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

    Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors par la question précédente, $\mathscr{P}(2n)$ est vraie. Posons $m = 2n$. Par la question 21. on en déduit que pour tout $k \in [\![1; m]\!] = [\![1; 2n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Notamment $1 \leqslant n+1 \leqslant 2n$ car $n \geqslant 1$. Donc pour $k = n+1$, on en déduit que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi,
$$\mathscr{P}(n) \ \Rightarrow\ \mathscr{P}(n+1).$$

    Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n) \text{ est vraie.}}$$