Epreuve de mathématiques 2
2022-2023

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Trigonométrie

La résolution de la partie II nécessite la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$ *que l'on calcule (et donne même !) dans la partie I.*

Partie 1 : À la recherche des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
   (b) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{8})$ est une solution de l'équation :
   $$8X^4 - 8X^2 + 1 = 0 \quad \text{d'inconnue } X \in \mathbb{R}$$
   (c) Déterminer les racines du trinôme $8u^2 - 8u + 1$ de la variable $u \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$ en justifiant avec soin.
2. Désormais, on admet que :
   $$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$
   (a) En déduire les valeurs de $\sin(\frac{\pi}{8})$ et $\tan(\frac{\pi}{8})$.
   (b) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{3\pi}{8})$, $\cos(\frac{5\pi}{8})$ et $\cos(\frac{371\pi}{8})$.
3. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que :
   $$\sin^4(\theta) = \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}$$
   (b) En déduire $\sin^4(\frac{\pi}{8})$, puis justifier avec soin que la valeur trouvée est compatible avec un résultat trouvé en 2.a.

Partie 2 : Résolution d'équation et d'inéquation trigonométriques

4. (a) Factoriser l'expression $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire la résolution de l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   $$(E) \qquad \sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$
   (c) Représenter les solutions de l'équation (E) sur un cercle trigonométrique, puis préciser celles qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
5. Résoudre l'inéquation $2\cos(x) > \sqrt{2+\sqrt{2}}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   On fera une figure soignée pour justifier le résultat.

Problème 2 - Fonctions réelles

Soient $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 - x\ln(x) - 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ et $g : x \mapsto 2x - \ln(x) - 1$. On pose $g_1 = g'$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie 1 : Etude de g_1

1. Calculer g_1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Préciser les transformations remarquables du plan qu'il faut effectuer sur le graphe de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ pour obtenir celui de g_1 et en déduire le graphe de g_1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Préciser le signe de g_1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Justifier que g_1 définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble que l'on précisera.
5. Déterminer g_1^{-1}.

Partie 2 : Etude de g

6. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de dérivabilité de g.
7. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
8. Déterminer le tableau de variations complet de g sur $\mathcal{D}$ et vérifier que g est strictement positive sur $\mathcal{D}$.
9. Préciser le comportement asymptotique de g en $+\infty$.
10. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant la valeur de m le nombre d'antécédents de m par g. En déduire si la fonction $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est injective, surjective, bijective.

Partie 3 : Etude de f

11. Justifier que f est continue en 0.
12. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
13. Déterminer le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+$.
14. Préciser le comportement asymptotique de f en $+\infty$.
15. Justifier que f définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un intervalle J que l'on précisera.
16. Déduire de la question 14. le comportement asymptotique de f^{-1} en $+\infty$.
17. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.
18. Montrer que pour tout $y \in J$, $0 < \left(f^{-1}\right)'(y) \leqslant \frac{1}{\ln(2)}$.
19. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ puis en déduire l'équation de la tangente en 0 de f^{-1}.
20. Tracer le graphe de f^{-1}.

Problème 3 - Nombres complexes

Les deux parties sont indépendantes.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = \frac{|z|+z}{2}$.

Partie 1 : A propos de f

1. Calculer $f(4-2i)$ sous forme algébrique et préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
2. Calculer $f\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$ sous forme algébrique et polaire.
3. Déterminer l'ensemble $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z| \leqslant 1 \ \Rightarrow \ |f(z)| \leqslant 1$.
5. Montrer qu'il existe un unique complexe $z \in \mathbb{U}$ que l'on déterminera tel que $f(z) \in \mathbb{U}$.

Partie 2 : Etude d'une suite complexe

Soit $\theta_0 \in]-\pi;\pi[\setminus \{0\}$ et $z_0 = e^{i\theta_0}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$z_{n+1} = f(z_n) = \frac{|z_n| + z_n}{2}.$$

On note également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de y_{n+1} en fonction de y_n. En déduire une expression de y_n en fonction de n et θ_0.
7. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq 0$.

Par la question précédente, il est possible de donner la forme polaire de z_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = |z_n|$ et $\theta_n = \arg(z_n) \in]-\pi;\pi]$.

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{i\frac{\theta_n}{2}}$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente et en justifiant une relation de récurrence entre r_{n+1} et r_n ainsi qu'entre θ_{n+1} et θ_n.
10. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$

11. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de y_n sous forme de produit puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}.$$

12. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}} \frac{\sin(u)}{u}$.
13. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$