Commentaires du DS2
Trigonométrie, bijections, nombres complexes

Problème I - Trigonométrie

Un premier problème plutôt facile et globalement bien traité. De gros progrès sur la rédaction pour lesquels je me dois de vous féliciter.

Partie 1 : À la recherche des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.

   En développant directement ou avec les complexes. Bien réussie dans l'ensemble. Il est vital de réussir des questions accessibles de début de sujet. Vous avez été plus ou moins rapides dans vos calculs.

   (b) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{8})$ est une solution de l'équation :

   $$8X^4 - 8X^2 + 1 = 0 \quad \text{d'inconnue } X \in \mathbb{R}$$

   Votre rédaction n'est pas toujours très claire. On pose $x = \frac{\pi}{8}$ et on cite la question précédente. Attention à ne pas confondre x et X.

   (c) Déterminer les racines du trinôme $8u^2 - 8u + 1$ de la variable $u \in \mathbb{R}$.

   Facile et bien réussie.

   (d) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$ en justifiant avec soin.

   Trop d'erreurs ici ! Beaucoup oublient de justifier le signe je rappelle que $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ est fausse en général ! Ce n'est pas faute de vous l'avoir répété. Ne vous arrêtez pas à $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, il faut choisir et il faut justifier proprement son choix. Je précise que $2-\sqrt{2}$ est positif lui aussi...

2. Désormais, on admet que :

   $$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

   (a) En déduire les valeurs de $\sin(\frac{\pi}{8})$ et $\tan(\frac{\pi}{8})$.

   Le calcul de $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ne pose pas de problème mais le passage à la racine carrée est là aussi trop rarement justifié. N'oubliez pas de simplifier votre résultat pour le calcul de la tangente, il fallait enlever la racine carrée du dénominateur.

   (b) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{3\pi}{8})$, $\cos(\frac{5\pi}{8})$ et $\cos(\frac{371\pi}{8})$.

   Vous avez souvent utilisé du $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ cela marche mais donne un résultat moins joli que $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$. De bonnes réponses mais aussi plusieurs étudiants qui ont séché.

3. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que :

   $$\sin^4(\theta) = \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}$$

   Facile il suffisait de linéariser mais apparemment ce calcul n'est pas acquis pour tout le monde.

   (b) En déduire $\sin^4(\frac{\pi}{8})$, puis justifier avec soin que la valeur trouvée est compatible avec un résultat trouvé en 2.a.

   De bonnes réponses et question qui permettait de vérifier son résultat de la question 2.a

Partie 2 : Résolution d'équation et d'inéquation trigonométriques

4. (a) Factoriser l'expression $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Facile, bien réussie pour ceux qui avaient la bonne valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Certains ont mangé le facteur 2 ce qui rendait la suite impossible.

   (b) En déduire la résolution de l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

   $$(E) \qquad \sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

   Quelques bonnes réponses mais trop peu pourtant le calcul est classique.

   (c) Représenter les solutions de l'équation (E) sur un cercle trigonométrique, puis préciser celles qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

   Deux, trois belles réponses. A reprendre pour les autres.

5. Résoudre l'inéquation $2\cos(x) > \sqrt{2+\sqrt{2}}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   On fera une figure soignée pour justifier le résultat.

   Pas très difficile mais parfois non cherchée juste parce qu'elle se trouvait en fin de problème. Beaucoup ont donné le mauvais intervalle. A bien retravailler la question est très classique.

Problème II - Fonctions réelles

Plusieurs questions plus faciles ou dont le barème était plus indulgent que dans le problème 1 mais aussi des rédactions plus approximatives. Je retiens surtout le fait que trop peu d'entre vous savent utiliser correctement le théorème de la bijection ou de la dérivée de la réciproque.

Soient $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 - x\ln(x) - 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ et $g : x \mapsto 2x - \ln(x) - 1$. On pose $g_1 = g'$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie 1 : Etude de g_1

1. Calculer g_1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Facile. N'oubliez pas de préciser votre variable. J'ai vu beaucoup de $g_1 = 2 - \frac{1}{x}$. Cette égalité est absurde, une fonction g_1 n'est pas égale à un réel $2 - \frac{1}{x}$. Il faut écrire $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g_1(x) = 2 - \frac{1}{x}$ ou $g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2 - \frac{1}{x} \end{array}$ ou au moins $g_1 : x \mapsto 2 - \frac{1}{x}$. Bon le sujet n'est pas parfait puisqu'il suppose implicitement que g_1 est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est toujours mieux de le justifier, beaucoup l'ont fait.

2. Préciser les transformations remarquables du plan qu'il faut effectuer sur le graphe de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ pour obtenir celui de g_1 et en déduire le graphe de g_1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Plusieurs ont parlé de dilatation (sans préciser horizontale ou verticale) de facteur -1. C'est correct mais il est préférable ici de parler de symétrie axiale. Là aussi quand vous parlez de translation (on dit translation, pas faire une translativité, j'ai bien ri) préciser de quel vecteur il s'agit. N'oubliez pas de tracer le graphe demandé.

3. Préciser le signe de g_1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Toute question demande développement. Parachuter le tableau de signe ne suffit. Quelques-uns ont invoquer un « en lisant le graphe ». Un dessin n'est jamais une preuve.

4. Justifier que g_1 définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble que l'on précisera.

   Mauvais, mauvais, mauvais!!! La question est pourtant très simple! On site les DEUX hypothèses (pas plus ni moins!) on invoque le théorème et on conclut. Beaucoup me parlent de dérivabilité, c'est montrer que l'on connaît bien mal son théorème. D'autres parlent de la non-annulation de f' (voire de f tant qu'à faire). Intolérable qu'un simple théorème du cours soit aussi fragile. Autre point, beaucoup parachutent l'intervalle d'arrivée ou le cite avant de citer le théorème. Je rappelle que la forme de l'intervalle est AUSSI un conséquence du théorème et que les deux valeurs/limites aux bornes doivent être justifiées ou au moins écrites proprement. Allez donc voir la copie d'Antoine par exemple.

5. Déterminer g_1^{-1}.

   Pas mal de bonnes réponses mais aussi beaucoup définissent mal x et/ou y. Justifiez bien le passage à l'inverse par la non-annulation de la variable.

Partie 2 : Etude de g

6. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de dérivabilité de g.

   Un point gratuit. On parlait de dérivabilité et non de définition, même si les deux ensembles sont égaux attention dans votre copie à ne pas écrire l'un pour désigner l'autre.

7. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

   A écrire proprement : on factorise par x et on invoque la croissance comparée (la phrase DOIT apparaître) pour la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$. Certains invoquent $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} x$ pour conclure, j'ai été tolérant mais c'est moins rigoureux que ce qui est fait dans le corrigé.

8. Déterminer le tableau de variations complet de g sur $\mathcal{D}$ et vérifier que g est strictement positive sur $\mathcal{D}$.

   Justifiez bien que vous utilisez la question 3. Calculez les limites et la valeur en $1/2$ AVANT d'écrire le tableau de variations. N'oubliez pas de justifier que g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

9. Préciser le comportement asymptotique de g en $+\infty$.

   Assez peu de bonnes réponses. Beaucoup arrivent à calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ mais s'arrêtent là. D'autres poursuivent mais se trompent dans la conclusion. Attention à ne pas confondre une asymptote et une branche parabolique. Attention à la gestion de votre variable x, si vous voulez calculer $\frac{g(x)}{x}$ sans la limite devant, présentez x.

10. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant la valeur de m le nombre d'antécédents de m par g. En déduire si la fonction $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est injective, surjective, bijective.

    Bof, moins de bonnes réponses que ce que je pensais. La question n'est pourtant pas très dure. Plusieurs confondent surjective et injective ou alors ne sont pas solides sur ces notions.

Partie 3 : Etude de f

11. Justifier que f est continue en 0.

    Trop, beaucoup trop d'arnaques. Ce n'est pas parce que f est définie en 0 qu'elle est continue. Il faut revenir à la définition et simplement montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = f(0)$. On ne parle pas ici de la limite à gauche puisque f n'est pas définie sur $\mathbb{R}_-^*$.

12. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

    Une ou deux bonnes réponses. Pourtant la question n'est pas dure. Certains font l'erreur superbe, classique et absolument à éviter car elle révèle une profonde incompréhension de ce qu'est une dérivée, outil qui est censé être basique pour nous, bref certains font l'erreur suivant : $f(0) = -1$. -1 est constant, donc sa dérivée est nulle donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Bien sûr, on a $\exp(0) = 1$, 1 est constant et donc tout le monde sait que $\exp'(0) = 0$ i.e. $1 = e^0 = 0$, à un près c'est bon... L'erreur grossière est de dire que le nombre -1 est dérivable. Cela n'a pas de sens. Les nombres ne sont pas dérivables. Seules les fonctions le sont. Sinon d'autres ont bien tenté le taux d'accroissement sans réussir à conclure, à bien reprendre avec le corrigé.

13. Déterminer le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+$.

    Pas de difficulté majeur mais des rédactions qui laissent parfois à désirées. Bien calculer la dérivée de f (en parlant d'abord de dérivabilité). Bien citer la question 8. Bien écrire les limites aux bornes avant le tableau

14. Préciser le comportement asymptotique de f en $+\infty$.

    Pas de difficulté et pourtant beaucoup d'erreurs.

15. Justifier que f définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un intervalle J que l'on précisera.

    Même remarque que pour la question 4. C'est vraiment dommage.

16. Déduire de la question 14. le comportement asymptotique de f^{-1} en $+\infty$.

    IMPORTANT : j'ai vu plusieurs fois (ici ou dans une question similaire) puisque $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\neg} x$ alors

    $$\lim_{x\to+\infty} x^2 - x\ln(x) - 1 = \lim_{x\to+\infty} x\left(x - \ln(x) - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x \times x = \dots.$$

    Je rappelle qu'IL EST INTERDIT DE PASSER A LA LIMITE SUR UN SEUL MORCEAU. A copier 100 fois.

17. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.

    Là aussi très décevant. La question est facile, il suffit de citer (en justifiant un peu) les hypothèses du théorème et de citer le théorème.

18. Montrer que pour tout $y \in J$, $0 < \left(f^{-1}\right)'(y) \leqslant \frac{1}{\ln(2)}$.

    La formule de $\left(f^{-1}\right)'$ n'est pas toujours sue. La question n'était pas si dure mais je n'ai pas plus d'une ou deux bonnes réponses.

19. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ puis en déduire l'équation de la tangente en 0 de f^{-1}.

    Aucune bonne réponse.

20. Tracer le graphe de f^{-1}.

    Il fallait avoir réussi les questions précédentes.

Problème III - Nombres complexes

Problème bien moins réussi, notamment parce que beaucoup moins abordé. Cependant il révèle également pour une poignée d'entre vous de grandes difficultés dans la gestion basique des complexes ce qui est plus gênant. D'autres questions un peu plus dures mais pas d'une grande difficulté n'ont pas été suffisamment réussi. Une meilleure préparation est souhaitable pour avancer dans ces questions très ressemblantes de ce que nous avions fait en classe (TD, exemples, interro...) Quelques belles copies, aucune de complète.
Les deux parties sont indépendantes.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = \frac{|z|+z}{2}$.

Partie 1 : A propos de f

1. Calculer $f(4-2i)$ sous forme algébrique et préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.

   Simple et basic. A savoir absolument et à retravailler si l'on a fait une erreur de calcul. Pas de i naturellement dans la partie imaginaire.

2. Calculer $f\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$ sous forme algébrique et polaire.

   Ok pour la plupart. Vous êtes nombreux à avoir été longs sur le calcul de $\left|\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right|$ qui est pourtant directement égal à 1. De belles réponses pour la forme polaire : à partir de la partie algébrique ou directement par la factorisation par l'angle moitié.

3. Déterminer l'ensemble $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$.

   Attention à ne pas écrire $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; \dots$. En effet, $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$ est un ensemble et non une assertion. Question classique. Quelques bonnes réponses.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z| \leqslant 1 \;\Rightarrow\; |f(z)| \leqslant 1$.

   Aucune bonne réponse. Vous n'avez pas encore l'habitude de manipuler des inégalités (et ça se voit). ATTENTION : je rappelle qu'il est INTERDIT d'écrire des inégalités dans les complexes. On ne peut écrire que des inégalités de réels donc de modules de complexes oui mais de complexes tout court non. Il suffisait d'utiliser l'inégalité triangulaire.

5. Montrer qu'il existe un unique complexe $z \in \mathbb{U}$ que l'on déterminera tel que $f(z) \in \mathbb{U}$.

   Bien souvent vous avez pas mal avancé mais vous n'arrivez pas à conclure car vous oubliez que $z \in \mathbb{U}$ et que donc $|z| = 1$.

Partie 2 : Etude d'une suite complexe

Soit $\theta_0 \in]-\pi;\pi[\setminus \{0\}$ et $z_0 = \mathrm{e}^{i\theta_0}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$z_{n+1} = f(z_n) = \frac{|z_n| + z_n}{2}.$$

On note également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de y_{n+1} en fonction de y_n. En déduire une expression de y_n en fonction de n et θ_0.

   Attention, si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Im}(\lambda+z) \neq \lambda + \mathrm{Im}(z)$ mais dans ce cas, on a bien $\mathrm{Im}(\lambda+z) = \mathrm{Im}(z)$. Quelques erreurs également sur le passage de suite géométrique à l'expression de y_n en fonction de n.

7. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq 0$.

   Une belle réponse. Vous êtes beaucoup partis sur une récurrence. A reprendre avec le corrigé.

Par la question précédente, il est possible de donner la forme polaire de z_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = |z_n|$ et $\theta_n = \arg(z_n) \in]-\pi;\pi]$.

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}$.

   La factorisation par la forme polaire et la pseudo-unicité de la forme polaire. Pas beaucoup de bonnes réponses.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente et en justifiant une relation de récurrence entre r_{n+1} et r_n ainsi qu'entre θ_{n+1} et θ_n.

   Un peu plus dure, non résolue.

10. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$

   Non traitée.

11. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de y_n sous forme de produit puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}.$$

   Non traitée.

12. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}} \dfrac{\sin(u)}{u}$.

    Un petit point facile à prendre, n'oubliez pas de lire l'intégralité du sujet pour aller chercher ces petits points.

13. En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$

    Non résolue pourtant abordable avec les résultats donnés dans l'énoncé et la question précédente. A savoir faire, manipulation classique de limite.