Corrigé du Devoir Surveillé 2
Fonctions réelles, trigonométrie et nombres complexes

Problème I - Trigonométrie

Partie 1 : À la recherche des lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 &= 2\left(2\cos^2(x) - 1\right)^2 - 1 \\ &= 2\left(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1\right) - 1 \\ &= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1.}$$

(b) En prenant $x = \frac{\pi}{8}$ dans la question précédente, on obtient

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 1.$$

Donc en posant $X = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, on a

$$0 = 8X^4 - 8X^2 + 1.$$

$\boxed{\text{Conclusion, } \cos(\tfrac{\pi}{8}) \text{ est une solution de l'équation } 8X^4 - 8X^2 + 1 = 0 \text{ d'inconnue } X \in \mathbb{R}.}$

(c) Soit Δ le discriminant de $8u^2 - 8u + 1$. On a

$$\Delta = 64 - 32 = 32 = 2 \times 16.$$

Par conséquent les racines associées sont

$$u_1 = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{16} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{16} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

Conclusion, $\boxed{\text{les racines de } 8u^2 - 8u + 1 \text{ sont } u_1 = \tfrac{2+\sqrt{2}}{4} \text{ et } u_2 = \tfrac{2-\sqrt{2}}{4}.}$

(d) D'après la question (b), on sait que $u = X^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est une solution de l'équation $8u^2 - 8u + 1$. Donc d'après la question (c),

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \qquad \text{OU} \qquad \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

Or on note que

$$0 \leqslant \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

et $0 \leqslant \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$ donc $0 \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ puis, par la stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) < \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Ainsi

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{4} < \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) < \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Comme $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \neq \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, on en déduit nécessairement que

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Or on sait que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.}$$

2. (a) Par la formule fondamentale et la question précédente, on a

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1-\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1-\frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Or $0 \leqslant \frac{\pi}{8} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$$

De là, on en déduit également, avec la valeur du cosinus précédemment calculée, que

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} &= \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}}\\ &= \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4-2}}\\ &= \sqrt{3-2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Or on note que $3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$. Donc

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \left|\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{2}-1 \qquad \text{car } \sqrt{2}-1>0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1.}$$

(b) On observe que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$. Donc par ce qui précède,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

De plus $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ et donc de même

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Enfin, on observe que $\frac{371\pi}{8} = \frac{(8\times 46+3)\pi}{8} = 23\times 2\pi + \frac{3\pi}{8}$. La fonction cosinus étant 2π-périodique, on a

$$\cos\left(\frac{371\pi}{8}\right) = \cos\left(23\times 2\pi+\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

et par ce qui précède, $\cos\left(\frac{371\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{371\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$$

3. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par des formules de linéarisation, on a

$$\begin{aligned}\sin^4(\theta) = \left(\sin^2(\theta)\right)^2 &= \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2\\ &= \frac{1-2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)}{4}\\ &= \frac{1-2\cos(2\theta)+\frac{1+\cos(4\theta)}{2}}{4}\\ &= \frac{3-4\cos(2\theta)+\cos(4\theta)}{8}.\end{aligned}$$

Conclusion, on a bien montré que

$$\boxed{\sin^4(\theta) = \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}.}$$

(b) D'après la question précédente avec $\theta = \frac{\pi}{8}$, on a

$$\begin{aligned}\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{1}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{8}\\ &= 0 - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}.}$$

Vérifions que ce résultat est compatible avec la valeur de $\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)$ trouvée à la question 3.(a) :

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^4 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{4-4\sqrt{2}+2}{16} = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}.$$

$\boxed{\text{Ce calcul est donc bien cohérent avec la valeur précédemment trouvée}}$.

Partie II - Résolution d'équation et d'inéquation trigonométriques

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre réels suivants :

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x) = 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cos(3x) - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\sin(3x)\right).$$

Donc d'après les calculs de la partie I,

$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x) &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos(3x) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin(3x)\right)\\ &= 2\cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right).\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la forme polaire est donnée par

$$\boxed{\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(3x) - \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin(3x) = 2\cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right).}$$

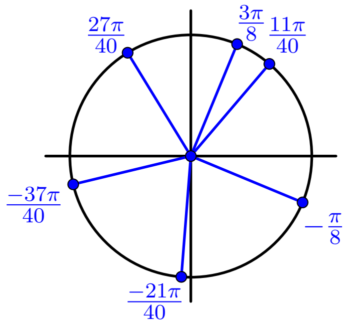
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad 3x+\frac{\pi}{8} \equiv 2x+\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad 3x+\frac{\pi}{8} \equiv -2x-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{3\pi}{8}\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad 5x \equiv -\frac{5\pi}{8}\ [2\pi]\\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{3\pi}{8}\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad x \equiv -\frac{\pi}{8}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right].
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{(E) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{\frac{3\pi}{8}+2k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{5} \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

(c) On observe que $\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8} \leqslant \frac{3\pi}{8} \leqslant \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{4} \leqslant -\frac{\pi}{8} \leqslant 0$.
Puis si $k=1$, $-\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{5} = \frac{-5\pi+16\pi}{40} = \frac{11\pi}{40} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{40}$ (légèrement supérieur à $\frac{\pi}{4}$),
si $k=2$, $-\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{5} = \frac{11\pi+16\pi}{40} = \frac{27\pi}{40} \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{40}\right[$,
si $k=-1$, $-\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{5} = \frac{-5\pi-16\pi}{40} = -\frac{21\pi}{40} \in \left]-\frac{\pi}{2};-\frac{3\pi}{4}\right[$,
si $k=-2$, $\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} = \frac{-21\pi-16}{40} = -\frac{37\pi}{40} \in \left]-\frac{3\pi}{4};-\pi\right[$.
D'où la figure suivante :



Et l'ensemble des solutions de (E) entre $[-\pi;\pi]$ est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{-37\pi}{40}\,;\,\frac{-21\pi}{40}\,;\,-\frac{\pi}{8}\,;\,\frac{11\pi}{40}\,;\,\frac{3\pi}{8}\,;\,\frac{27\pi}{40}\right\}.}$$

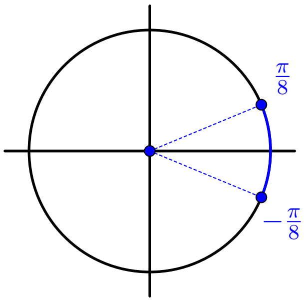
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :

$$2\cos(x) > \sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) > \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Donc d'après la partie 1,

$$2\cos(x) > \sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) > \cos\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

On observe donc que cela à correspond à la partie bleue suivante du cercle trigonométrique :



Par conséquent,

$$2\cos(x) > \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad -\frac{\pi}{8} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{8} + 2k\pi.$$

Conclusion,

$$\boxed{2\cos(x) > \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{8} + 2k\pi ; \frac{\pi}{8} + 2k\pi\right].}$$

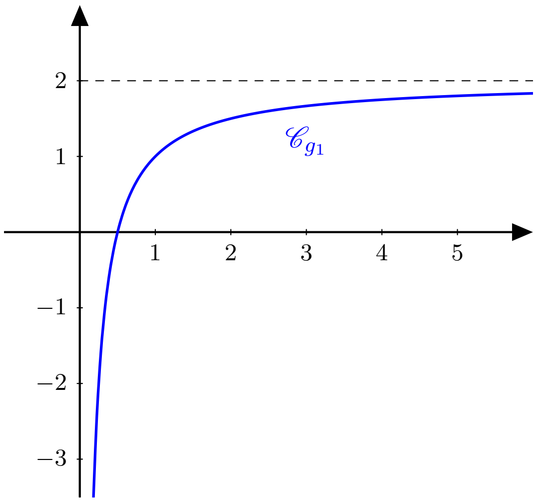
Problème II - Fonctions réelles

Soient $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 - x\ln(x) - 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ et $g : x \mapsto 2x - \ln(x) - 1$. On pose $g_1 = g'$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie 1 : Etude de g_1

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,
$$g(x) = 2x - \ln(x) - 1.$$
On observe que g est bien définie et dérivable en x car $x > 0$ et on a
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g_1(x) = g'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}.}$$

2. Le graphe de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ s'obtient à partir de celui de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ par une symétrie axiale d'axe (Ox). Puis le graphe de g_1 s'obtient à partir de celui de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ par une translation verticale de vecteur $2\overrightarrow{j}$. On en déduit donc le graphe suivant :



3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} g_1(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 > 0 \qquad \text{car } x > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
De même, $g_1(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ et $g_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Conclusion, on obtient le tableau de signe suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g_1(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

4. La fonction g_1 est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g_1'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. Donc la fonction g_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,
   - g_1 est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,
   - g_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

donc par le théorème de la bijection, g_1 définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $g_1\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ et de plus $g_1\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \left]\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g_1(x); \lim_{x\to+\infty} g_1(x)\right[$. Or

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g_1(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2-\frac{1}{x} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g_1(x) = \lim_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x} = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{g_1 \text{ définit une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans }]-\infty;2[.}$$

5. Soient $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $y\in\,]-\infty;2[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y = g_1(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = 2-\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = 2-y \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2-y} \qquad \text{car } y\neq 2 \text{ et } x\neq 0 \end{aligned}$$

De plus, pour $y<2$, on a $2-y>0$ et donc $x=\frac{1}{2-y}\in\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, l'unique antécédent de y dans $\mathbb{R}_+^*$ par g_1 est $\frac{1}{2-y}$. Conclusion,

$$\boxed{g_1^{-1} : \begin{array}{rcl}]-\infty;2[& \to & \mathbb{R}_+^* \\ y & \mapsto & \frac{1}{2-y}. \end{array}}$$

Partie 2 : Etude de g

6. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$x\in\mathcal{D} \quad\Leftrightarrow\quad x>0 \quad\Leftrightarrow\quad x\neq 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}=\mathbb{R}_+^*.}$$

7. Pour tout $x>0$, on a

$$g(x) = 2x-\ln(x)-1 = 2x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}\right).$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ par croissance comparée. Donc $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}=1$. Conclusion, par produit,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

8. On sait que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $g'(x)=g_1(x)$. De plus, par la question 3. g_1 est strictement négative sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ et strictement positive sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ donc par continuité en $1/2$, g est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$. Puis,

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)-1 = 1+\ln(2)-1 = \ln(2).$$

Enfin,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x-\ln(x)-1 = +\infty.$$

Conclusion, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g	$+\infty$ ↘	$\ln(2)$	↗ $+\infty$

On observe notamment que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $g(x) \geqslant \ln(2) > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(x) > 0.}$$

9. On sait déjà que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Puis,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \ln(x) - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} = 2 \qquad \text{par croissance comparée.}$$

Enfin,

$$\lim_{x \to +\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} (-\ln(x) - 1) = -\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Le graphe de } g \text{ n'admet pas d'asymptote mais une branche asymptotique oblique de direction } y = 2x \text{ en } +\infty.}$$

10. Soit $m \in \mathbb{R}$. D'après le tableau de variations précédent, on a

- si $m \in]\ln(2); +\infty[$, alors $\boxed{m \text{ possède deux antécédents}}$ par g dans $\mathbb{R}_+^*$,
- si $m = \ln(2)$ alors $\boxed{m \text{ admet exactement un antécédent}}$ par g dans $\mathbb{R}_+^*$ (et celui-ci vaut $1/2$),
- si $m \in]-\infty; \ln(2)[$ alors $\boxed{m \text{ n'admet aucun antécédent}}$ par g dans $\mathbb{R}_+^*$.

Puisque tout élément de $]\ln(2); +\infty[$ admet strictement plus d'un antécédent, on en déduit que g n'est pas injective. De même puisque tout élément de $]-\infty; \ln(2)[$ n'admet aucun antécédent, on en déduit que g n'est pas surjective non plus et donc a fortiori pas bijective. Conclusion,

$$\boxed{g \text{ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.}}$$

Partie 3 : Etude de f

11. Par croissance comparée, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$. Donc par somme,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 - x \ln(x) - 1 = -1 = f(0).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue en } 0.}$$

12. Soit $x > 0$. On a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - x\ln(x) - 1 - (-1)}{x} = x - \ln(x).$$

Par conséquent,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0 \text{ mais possède une demi-tangente verticale en ce point.}}$$

13. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et somme de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = 2x - \ln(x) - x \times \frac{1}{x} = 2x - \ln(x) - 1 = g(x).$$

Or par la question 8. on sait que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc par continuité sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = -1$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - x\ln(x) - 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée. Donc par somme et produit,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Conclusion, on obtient le tableau de variations suivant :

$$\begin{array}{|c|lcr|}
\hline
x & 0 & & +\infty \\
\hline
 & & & +\infty \\
f & & \nearrow & \\
 & -1 & & \\
\hline
\end{array}$$

14. On sait déjà que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x - \ln(x) - \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ présente une branche parabolique verticale en } +\infty.}$$

15. On observe que

- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions qui le sont,
- par ce qui précède, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

donc par le théorème de la bijection, la fonction f définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $J = f\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ de plus,

$$J = \left] \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[=]-1; +\infty[.$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans }]-1;+\infty[.}$$

16. On sait que le graphe de f^{-1} s'obtient à partir de celui de f par la symétrie axiale d'axe $y = x$. Puisque f présente une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$ on en déduit que

$$\boxed{f^{-1} \text{ présente une branche parabolique de direction } (Ox) \text{ en } +\infty.}$$

17. Par ce qui précède, on a

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = g(x) > 0$ et donc notamment $f'(x) \neq 0$.

Ainsi par le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque, on en déduit que

$$\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } J = f\left(\mathbb{R}_+^*\right) =]-1; +\infty[.}$$

18. Toujours par le théorème de la dérivabilité de la fonction réciproque, on sait de plus que

$$\forall y \in]-1; +\infty[, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = g(x) \geqslant \ln(2)$. Soit $y \in]-1; +\infty[$. On a $x = f^{-1}(y) \in \mathbb{R}_+^*$. Donc

$$f'(x) = f'\left(f^{-1}(y)\right) \geqslant \ln(2) > 0.$$

Par passage à l'inverse, on en déduit que $0 < \left(f^{-1}\right)'(y) \leqslant \frac{1}{\ln(2)}$. Ceci étant vrai pour $y \in J$ quelconque, on en déduit que

$$\boxed{\forall y \in J =]-1; +\infty[, \qquad 0 < \left(f^{-1}\right)'(y) \leqslant \frac{1}{\ln(2)}.}$$

19. Puisque $0 \in J =]-1; +\infty[$, par la question précédente, on obtient que

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}.$$

Or on observe que $f(1) = 1^2 - 1 \times \ln(1) - 1 = 0$. Donc $f^{-1}(0) = 1$. Ainsi,

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{g(1)} = \frac{1}{2 - \ln(1) - 1} = 1.$$

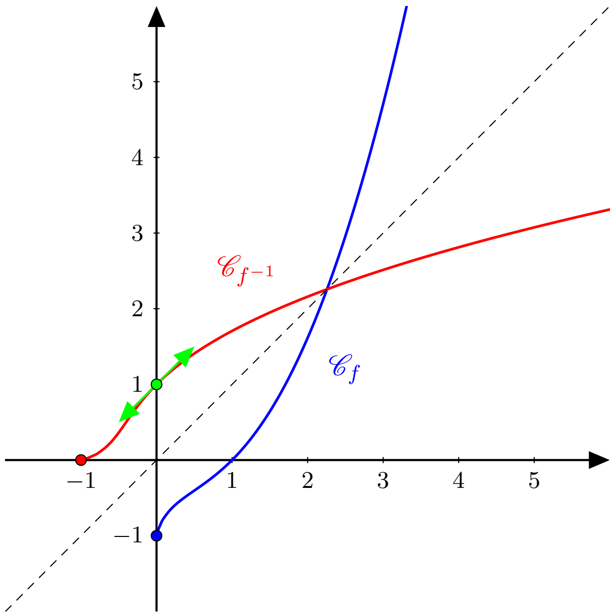
Puisque f^{-1} est dérivable en 0, on en déduit que f^{-1} admet une tangente en 0 d'équation,

$$y = \left(f^{-1}\right)'(0)(x - 0) + f^{-1}(0) = 1 \times x + 1 = x + 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(0) = 1 \qquad \text{et l'équation de la tangente en 0 de } f^{-1} \text{ est : } y = x + 1.}$$

20. Par tout ce qui précède et puisque le graphe de f^{-1} est le symétrique de celui de f par l'axe $y = x$,



Problème III - Nombres complexes

Les deux parties sont indépendantes.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = \frac{|z|+z}{2}$.

Partie 1 : A propos de f

1. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$f(4-2i) = \frac{|4-2i|+4-2i}{2} = \frac{\sqrt{16+4}+4-2i}{2} = \frac{2\sqrt{5}+4-2i}{2} = 2+\sqrt{5}-i.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(4-2i) = 2+\sqrt{5}-i, \qquad \mathrm{Re}\,(f(4-2i)) = 2+\sqrt{5}, \qquad \mathrm{Im}\,(f(4-2i)) = -2.}$$

2. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$f\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \frac{\left|\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right| + \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}}{2} = \frac{1+\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}}{2}.$$

En factorisant par l'angle moitié, on obtient,

$$f\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\,\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Puisque $1/2 > 0$, la forme polaire de $f\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$ est bien $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. Puis, par la formule d'Euler

$$f\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}.}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{|z|+z}{2} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{|z|+z}{2} = \overline{\left(\frac{|z|+z}{2}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{|z|+z}{2} = \frac{|z|+\overline{z}}{2} \qquad \text{car } |z| \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \overline{z} \\
&\Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.}$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons que $|z| \leqslant 1$, alors, par l'inégalité triangulaire,

$$|f(z)| = \left|\frac{|z|}{2} + \frac{z}{2}\right| \leqslant \left|\frac{|z|}{2}\right| + \left|\frac{z}{2}\right| = \frac{|z|}{2} + \frac{|z|}{2} \qquad \text{car } \frac{|z|}{2} \geqslant 0.$$

Donc $|f(z)| \leqslant |z|$. Or $|z| \leqslant 1$. Donc $|f(z)| \leqslant 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad (|z| \leqslant 1 \;\Rightarrow\; |f(z)| \leqslant 1).}$$

5. Soit $z \in \mathbb{U}$ i.e. $|z| = 1$. Alors, $f(z) = \frac{|z|+z}{2} = \frac{1+z}{2}$. Par suite on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} f(z) \in \mathbb{U} & \Leftrightarrow & |f(z)|^2 = 1 & \\ & \Leftrightarrow & f(z)\overline{f(z)} = 1 & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1+z}{2}\dfrac{1+\overline{z}}{2} = 1 & \\ & \Leftrightarrow & 1 + \overline{z} + z + z\overline{z} = 4 & \\ & \Leftrightarrow & 2\mathrm{Re}\,(z) + |z|^2 = 3 & \\ & \Leftrightarrow & 2\mathrm{Re}\,(z) + 1 = 3 & \text{car } z \in \mathbb{U} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Re}\,(z) = 1. & \end{array}$$

Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $z = 1+ib$. Or $z \in \mathbb{U}$, donc $\sqrt{1+b^2} = 1 \Leftrightarrow 1+b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U}, \qquad (f(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z = 1).}$$

Partie 2 : Etude d'une suite complexe

Soit $\theta_0 \in]-\pi;\pi[\setminus \{0\}$ et $z_0 = e^{i\theta_0}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$z_{n+1} = f(z_n) = \frac{|z_n| + z_n}{2}.$$

On note également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \mathrm{Re}\,(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}\,(z_n)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{z_{n+1} - \overline{z_{n+1}}}{2i} \\ &= \frac{\frac{|z_n|+z_n}{2} - \overline{\left(\frac{|z_n|+z_n}{2}\right)}}{2i} \\ &= \frac{|z_n| + z_n - |z_n| - \overline{z_n}}{4i} \\ &= \frac{z_n - \overline{z_n}}{4i} \\ &= \frac{y_n}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_{n+1} = \frac{y_n}{2}.}$$

Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 1/2. Dès lors, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_0 = \frac{\mathrm{Im}\,(z_0)}{2^n} = \frac{\mathrm{Im}\,(e^{i\theta_0})}{2^n} = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_n = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n}.}$$

7. Puisque $\theta_0 \in]-\pi;\pi[\setminus \{0\}$, on en déduit que $\sin(\theta_0) \neq 0$ et donc par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n} \neq 0$. Puisque sa partie imaginaire est non nul, le complexe z_n est aussi nécessairement non nul. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n \neq 0.}$$

Par la question précédente, il est possible de donner la forme polaire de z_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = |z_n|$ et $\theta_n = \arg(z_n) \in]-\pi;\pi]$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$z_{n+1} = \frac{|z_n| + z_n}{2} = \frac{r_n + r_n \mathrm{e}^{i\,\theta_n}}{2} = \frac{r_n}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{i\,\theta_n}\right).$$
Par la factorisation par l'angle moitié,
$$z_{n+1} = \frac{r_n}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta_n}{2}} + \mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}\right) = \frac{r_n}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}\,2\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right).$$
Conclusion, on obtient bien que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque par définition $\theta_n \in]-\pi;\pi[$, on en déduit que $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, on a $\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) > 0$ et donc il fait bien partie du module de z_{n+1}. De même puisque $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ il est l'argument de z_{n+1} qui est compris entre $]-\pi;\pi[$. Conclusion,
$$\boxed{r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.}$$

10. Par la question précédente, on observe que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 1/2. Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}.$$
Procédons maintenant par récurrence. Posons
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathscr{P}(n) : \text{« } r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right). \text{ »}$$
Initialisation. Si $n = 1$, alors,
$$\prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{\theta_0}{2^1}\right) = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right).$$
D'autre part, par la question précédente avec $n = 0$,
$$r_1 = r_0 \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \left|\mathrm{e}^{i\,\theta_0}\right| \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right).$$
Donc on a bien $r_1 = \prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$ et $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie i.e.
$$r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$
Alors, par la question précédente,
$$r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)\right) \times \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right).$$

De plus, on a vu que $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ donc

$$r_{n+1} = \left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)\right) \times \cos\left(\frac{\frac{\theta_0}{2^n}}{2}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)\right) \times \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n+1}}\right) = \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. *Conclusion,* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $z_n = r_n \, \mathrm{e}^{i\,\theta_n} = x_n + iy_n$. Donc on obtient que

$$y_n = r_n \sin(\theta_n).$$

Par la question précédente, on sait que $r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$ et on a vu que $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad y_n = \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la question 6. $y_n = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\sin(\theta_0)}{2^n} = \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$

Or $\theta_0 \in \left]-\pi ; \pi\right[\setminus \{0\}$. Donc $\frac{\theta_0}{2^n} \in \left]-\frac{\pi}{2^n} ; \frac{\pi}{2^n}\right[\setminus \{0\} \subseteq \left]-\pi ; \pi\right[\setminus \{0\}$. Dès lors, $\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) \neq 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}.}$$

12. *Alors ça, c'est gentil !* D'après le cours, on sait directement que

$$\boxed{\lim_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}} \frac{\sin(u)}{u} = 1.}$$

13. Posons $u = \frac{\theta_0}{2^n}$. Quand $n \to +\infty$, on a $u \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u \neq 0$. Donc par la question précédente,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}{\frac{\theta_0}{2^n}} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\theta_0} \lim_{n \to +\infty} 2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} 2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \theta_0.$$

Par passage à l'inverse, car $\theta_0 \neq 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)} = \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}.$$

Donc par ce qui précède, on en conclut que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}.}$$