Epreuve de mathématiques 3
2022-2023

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 3h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Calcul Algébrique

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} k^{\alpha} 2^{a_k},$$

avec $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 1 : Cours

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$. Préciser S_n pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.
2. On suppose que $\alpha = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. Calculer S_n.

Partie 2 : Cas où $\alpha = 1$

On suppose que $\alpha = 1$ et on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. On propose ni une ni deux ni trois mais quatre méthodes pour calculer S_n !

3. Calculer S_1 et S_2.
4. *(Par un changement d'indice)*
   (a) Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, 2^{k+1}$.
   (b) En déduire la valeur de S_n.
5. *(Par une dérivée)* Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \end{array}$.
   En calculant de deux façons la dérivée de f, retrouver la valeur de S_n.
6. *(Par une autre méthode dont je ne donnerai pas le nom...)*
   (a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)\, 2^{k+1} - k2^k = k2^k + 2^{k+1}$.
   (b) Retrouver alors la valeur de S_n.
7. *(Par une somme double)*
   (a) Sans utiliser les questions précédentes, montrer que
   $$\sum_{1 \leqslant p \leqslant k \leqslant n} 2^k = S_n.$$
   (b) Retrouver alors la valeur de S_n.
   (c) Calculer la somme double (triangulaire stricte) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant p < k \leqslant n} \binom{n}{p} 2^k$.
8. *(Une conséquence)*
   A l'aide d'une inversion d'indice et de la valeur de S_n (déterminée dans l'une des questions précédentes), calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$.

Problème 2 - Fonctions usuelles

Partie 1 : Simplification par la dérivée

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad \varphi : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}.$$

1. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de φ.
2. Préciser la parité de φ.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$,
$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}.$$
5. En déduire le tableau de variation complet de φ.
6. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}(x)}.$$
7. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x))$.

Partie 2 : Simplification par la trigonométrie

On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) \end{array}.$$

8. Déterminer la parité de g.
9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x < \sqrt{1+x^2} < 1+\sqrt{1+x^2}$.
10. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$0 \leqslant g(x) < \frac{\pi}{4}.$$
11. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\tan(g(x))$ et $\tan(2g(x))$ existent.
12. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\tan(2g(x)) = x$.
13. En déduire une expression plus simple de g sur $\mathbb{R}$.
14. A l'aide de la question précédente, retrouver le résultat de la question 7.

Partie 3 : Pour occuper les plus rapides

On considère l'équation

$$(E) : \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

15. Déterminer $\mathcal{D}_E$ le domaine où (E) est bien définie.
16. Pour $x \in \mathcal{D}_E$, simplifier $\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.
17. Pour $x \in \mathcal{D}_E$, simplifier $\sin(\arctan(x))$.
18. A l'aide de la question 13. résoudre (E).