Commentaires du DS3
Calcul algébrique et fonctions usuelles

Problème I - Calcul Algébrique

Assez hétérogène. Un problème qui distinguait fortement les étudiants sérieux qui ont fait les efforts d'assimiler les techniques de base du calcul algébrique et les étudiants qui se sont contentés de suivre le chapitre de loin sans se confronter aux difficultés en amont (notamment dans la gestion des sommes doubles).

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha 2^{a_k},$$

avec $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 1 : Cours

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$. Préciser S_n pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

   Beaucoup d'étudiants ont répondu $\sum_{k=0}^{n} 1 = n$. Sinon les formules des premiers entiers et de leurs carrés sont (heureusement !) sues.

2. On suppose que $\alpha = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. Calculer S_n.

   On reconnaît naturellement une somme géométrique. Beaucoup ont pensé à préciser $2 \neq 1$, c'est bien.

Partie 2 : Cas où $\alpha = 1$

On suppose que $\alpha = 1$ et on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. On propose ni une ni deux ni trois mais quatre méthodes pour calculer S_n !

3. Calculer S_1 et S_2.

4. *(Par un changement d'indice)*

   (a) Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, 2^{k+1}$.

   Beaucoup trop de forçage !!!!! Vous avez vu le bon changement d'indice $\tilde{k} = k-1$ mais alors vous parachutez souvent merveilleusement un 0 en indice de départ juste parce que c'est le résultat attendu sans réfléchir si cela est vrai ou faux. Soyez rigoureux. Plusieurs ont bien pensé à extraire le terme d'ordre 0 (ou -1 suivant si on le faisait avant ou après).

   (b) En déduire la valeur de S_n.

   Question faisait le tri entre les étudiants qui ont bien retravaillé leur TD et les autres. On découpait la somme en deux et on faisait réapparaître S_n. Pas mal de belles réponses.

5. *(Par une dérivée)* Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} x^k \end{array}$.

   En calculant de deux façons la dérivée de f, retrouver la valeur de S_n.

   Question demandant plus d'autonomie. Aucune bonne réponse malheureusement, pourtant nous l'avions aussi fait en TD. A bien retravailler avec le corriger, technique classique et importante même si pas forcément évidente les premières fois (à la vingtième je vous assure que cela devient facile B)).

6. *(Par une autre méthode dont je ne donnerai pas le nom...)* télescopique !
   (a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)\,2^{k+1} - k2^k = k2^k + 2^{k+1}$.
   Cadeau.
   (b) Retrouver alors la valeur de S_n.
   Plusieurs sont repartis de la question 4. Les questions se voulaient plutôt indépendantes. Il fallait reconnaître à gauche une somme télescopique ! Une ou deux copies seulement de juste, dommage, elle n'était pas difficile.
7. *(Par une somme double)*
   (a) Sans utiliser les questions précédentes, montrer que
   $$\sum_{1 \leqslant p \leqslant k \leqslant n} 2^k = S_n.$$
   Vous vous embrouillez parfois avec celle d'après. Plusieurs bonnes réponses mais aussi beaucoup d'étudiants qui mettent l'indice interne en borne de la somme externe : la somme externe ne peut pas dépendre de l'indice interne. A copier 10 fois pour tout les trop nombreux fautifs ! Cette erreur révèle un manque cruel d'entrainement.
   (b) Retrouver alors la valeur de S_n.
   Il suffisait de sommer dans l'autre sens. Plusieurs ont réussi cette question plutôt que la précédente.
   (c) Calculer la somme double (triangulaire stricte) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant p < k \leqslant n} \binom{n}{p} 2^k$.
   Très peu de bonne réponse. Question un chouille plus longue mais sans difficulté majeur, ce n'est que du classique avec un peu plus d'autonomie. Beaucoup beaucoup trop de confusions. Notamment j'ai vu $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \binom{n}{p} = 2^k$ ce qui révèle un apprentissage trop fragile de la formule du binôme de Newton : l'indice final k était différent de l'indice du haut dans $\binom{n}{p}$, ici n, cela ne fonctionnait donc pas !
8. *(Une conséquence)*
   A l'aide d'une inversion d'indice et de la valeur de S_n (déterminée dans l'une des questions précédentes), calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$.
   Une petite inversion d'indice comme indiquée par l'énoncé mais peu de personne se sont lancées. Quelques-uns quand même avec succès.

Problème II - Fonctions usuelles

Un bonne maîtrise globalement des fonctions hyperboliques. Plus de difficultés dans la partie 2. Certains oublient encore de présenter la variable et se font sensiblement sanctionner. Il est inutile de tenter de résister à mes conseils...

Partie 1 : Simplification par la dérivée

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad \varphi : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}.$$

1. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de φ.
   Facile et réussie. Mais souvent vous oubliez de présenter x ou vous écrivez $\mathcal{D} \Leftrightarrow 1+\mathrm{ch}(x) \neq 0$. L'ensemble $\mathcal{D}$ n'est pas une assertion !

2. Préciser la parité de φ.

   La grande majorité oublie de présenter x et de spécifier que $\mathbb{R}$ est centré en 0 ! Ok sinon pratiquement que des bonnes réponses.

3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

   La grande majorité maîtrise maintenant ce type de calcul de limite. C'est bien !

4. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$,
$$\varphi'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)}.$$

   Deux trois arnaques qui ne servent à rien mais pas mal de bonnes réponses. N'oubliez pas de préciser que φ est bien dérivable.

5. En déduire le tableau de variation complet de φ.

   Ne parachutez pas le signe de φ', rédigez un minimum. La limite en $-\infty$ doit apparaître et être justifiée AVANT le tableau de variations. L'utilisation de l'imparité était largement souhaitée.

6. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\operatorname{ch}(x)}.$$

   Pas mal de bonnes réponses. Certains ont cru bon de dire que $\varphi(x) \in]-1;1[$, c'est hors sujet ! La fonction arctan n'est pas définie que sur $]-1;1[$ mais bien sur $\mathbb{R}$ tout entier.

7. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(x))$.

   Ouch, trop d'intégrations parachutées. Otez vous au plus vite ce genre d'idée : « puisque le sujet le dit, ça doit être vrai ». Il faut démontrer rigoureusement ce qui est donné. Le plus simple était de dériver $x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(x))$ et d'observer que cela faisait bien f'. Certains ont fait apparaître proprement la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(x))$, cela marchait aussi. ATTENTION à la constante d'intégration !!!

Partie 2 : Simplification par la trigonométrie

On considère la fonction
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) \end{array}.$$

8. Déterminer la parité de g.

   Ok mais là aussi on oublie de présenter x ou de parler de $\mathbb{R}$ centré en 0. Certains établissent le domaine de définition de g. Ce n'était pas nécessaire car admis par l'énoncé mais cela ne fait pas de mal.

9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x < \sqrt{1+x^2} < 1 + \sqrt{1+x^2}$.

   Laborieux ! Beaucoup de rédaction très confuses. Il fallait justifier $\sqrt{x^2} = x$. Je précise que $x \leqslant x^2$ est faux sur $]0;1[$. Enfin encore trop de confusions entre $\leqslant$ et $<$.

10. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$0 \leqslant g(x) < \frac{\pi}{4}.$$

    La division par $1 + \sqrt{1+x^2}$ doit être justifiée et non pas juste par $1 + \sqrt{1+x^2} \neq 0$. Puisque l'on manipule une inégalité il faut $1 + \sqrt{1+x^2} > 0$. Quelques bonnes réponses.

11. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\tan(g(x))$ et $\tan(2g(x))$ existent.

    Quelques-uns écrivent $\tan(g(x))$ avant d'avoir justifié son existence, c'est absurde. PAs très difficile, la rédaction était donc à soignée.

12. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\tan(2g(x)) = x$.

    Une petite poignée de belles réponses. Non traitée pour les autres.

13. En déduire une expression plus simple de g sur $\mathbb{R}$.

    Pas toujours claire le passage par la composition par arctan. Naturellement $\arctan(\tan(2g(x))) = 2g(x)$ **uniquement** parce que $2g(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Enfin, il fallait être attentif et voir qu'ici on parlait de $\mathbb{R}$ alors que la question précédente était sur $\mathbb{R}_+$ seulement.

14. A l'aide de la question précédente, retrouver le résultat de la question 7.

    Deux trois bonnes réponses.

Partie 3 : Pour occuper les plus rapides

On considère l'équation

$$(E)\ :\qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

15. Déterminer $\mathcal{D}_E$ le domaine où (E) est bien définie.

    Facile et pas toujours bien réussie...

16. Pour $x \in \mathcal{D}_E$, simplifier $\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

    Peu de réponses et la plupart ne justifie pas l'égalité $\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ qui doit être systématiquement redémontrée.

17. Pour $x \in \mathcal{D}_E$, simplifier $\sin(\arctan(x))$.

    Une belle réponse !

18. A l'aide de la question 13. résoudre (E).

    Non réussie.