Corrigé du Devoir Surveillé 3
Calcul algébrique et fonctions usuelles

Problème I - Calcul Algébrique

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} k^{\alpha} 2^{a_k},$$

avec $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 1 : Cours

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$. Alors, on obtient

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^{\alpha} 2^0 = \sum_{k=0}^{n} k^{\alpha}.$$

Si $\alpha = 0$, alors on obtient la somme d'une constante,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^0 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1.$$

De même, si $\alpha = 1$, on obtient la somme des premiers entiers :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si $\alpha = 2$, on obtient la somme des carrés des premiers entiers :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \begin{cases} n+1 & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{si } \alpha = 2. \end{cases}}$$

2. On suppose que $\alpha = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. Par définition, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^0 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $2 \neq 1$. Donc

$$S_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = 2^{n+1} - 1.}$$

Partie 2 : Cas où $\alpha = 1$

On suppose que $\alpha = 1$ et on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. On propose ni une ni deux ni trois mais quatre méthodes pour calculer S_n !

3. On a par définition,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k.$$

Donc

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} k2^k = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 = 2 \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{2} k2^k = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 = 2 + 8 = 10.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_1 = 2 \text{ et } S_2 = 10.}$$

4. *(Par un changement d'indice)*

(a) Par définition, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k + 0 \times 2^0 = \sum_{k=1}^{n} k2^k \qquad \text{car } n \geqslant 1.$$

Posons $\tilde{k} = k - 1$ i.e. $k = \tilde{k} + 1$. Alors,

$$S_n = \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} \left(\tilde{k} + 1\right) 2^{\tilde{k}+1}.$$

L'indice de sommation étant muet, on conclut

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, 2^{k+1}.}$$

(b) Par la question précédente, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} k2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k2^{k+1} - n2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \\ &= 2\sum_{k=0}^{n} k2^{k} - n2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \\ &= 2S_n - n2^{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k}. \end{aligned}$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $2 \neq 1$,

$$S_n = 2S_n - n2^{n+1} + 2\frac{2^{n-1+1} - 1}{2-1} = 2S_n - n2^{n+1} + 2\left(2^n - 1\right).$$

Dès lors, on en déduit que

$$S_n = n2^{n+1} - 2\left(2^n - 1\right) = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = (n-1)\, 2^{n+1} + 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = (n-1)\,2^{n+1} + 2.}$$

On vérifie son résultat. Si $n = 1$*, on a* $S_1 = (1-1)\,2^{1+1} + 2 = 2$ *ce qui est cohérent avec la question 3. De même,* $S_2 = (2-1)\,2^{2+1} + 2 = 8 + 2 = 10$ *OK !*

5. *(Par une dérivée)* Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \end{array}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on reconnaît une somme géométrique. Donc

$$f(x) = x\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}.$$

Cette expression est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad f'(x) &= \frac{(1-(n+1)\,x^n)\,(1-x) - \left(x - x^{n+1}\right)(-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1 - x - (n+1)\,x^n + (n+1)\,x^{n+1} + x - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{nx^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)\,x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

En particulier, pour $x = 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} &= \frac{n2^{n+1} - (n+1)\,2^n + 1}{(1-2)^2} \\
&= n2^{n+1} - (n+1)\,2^n + 1 \\
&= 2^n\,(2n - n - 1) + 1 \\
&= 2^n\,(n-1) + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k = 0 + \sum_{k=1}^{n} k2^k = 2\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 2\left[2^n\,(n-1) + 1\right] = 2^{n+1}\,(n-1) + 2.$$

Conclusion, on retrouve bien l'expression de la question 4.b

$$\boxed{S_n = 2^{n+1}\,(n-1) + 2.}$$

6. *(Par une autre méthode dont je ne donnerai pas le nom...)*

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$(k+1)\,2^{k+1} - k2^k = (2k+2)\,2^k - k2^k = (2k+2-k)\,2^k = (k+2)\,2^k = k2^k + 2^{k+1}.$$

Conclusion, on trouve bien que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (k+1)\,2^{k+1} - k2^k = k2^k + 2^{k+1}.}$$

(b) En sommant la relation précédente entre 0 et n, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)\,2^{k+1} - k2^k\right] = \sum_{k=0}^{n}\left[k2^k + 2^{k+1}\right]$$

On reconnaît une somme télescopique dans le terme de gauche donc

$$\begin{aligned}
& (n+1)\,2^{n+1} - 0 \times 2^0 = \sum_{k=0}^{n}\left[k2^k + 2^{k+1}\right] \\
\Leftrightarrow \qquad & (n+1)\,2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} k2^k + \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} \\
\Leftrightarrow \qquad & (n+1)\,2^{n+1} = S_n + 2\sum_{k=0}^{n} 2^k.
\end{aligned}$$

En reconnaissant une somme géométrique de raison $2 \neq 1$, on obtient que

$$\begin{aligned}
S_n &= (n+1)\,2^{n+1} - 2\sum_{k=0}^{n} 2^k \\
&= (n+1)\,2^{n+1} - 2 \times \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \\
&= (n+1)\,2^{n+1} - 2\left(2^{n+1}-1\right) \\
&= (n+1)\,2^{n+1} - 2^{n+2} + 2 \\
&= (n+1-2)\,2^{n+1} + 2 \\
&= (n-1)\,2^{n+1} + 2.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve une fois encore,

$$\boxed{S_n = (n-1)\,2^{n+1} + 2.}$$

7. *(Par une somme double)*

(a) En sommant en interne sur p et en externe sur k, on a

$$\sum_{1 \leqslant p \leqslant k \leqslant n} 2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} 2^k.$$

L'entier 2^k ne dépendant pas de p :

$$\sum_{1 \leqslant p \leqslant k \leqslant n} 2^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k \sum_{p=1}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{n} 2^k \times k = S_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{1 \leqslant p \leqslant k \leqslant n} 2^k = S_n.}$$

(b) En échangeant l'ordre de sommation i.e. en sommant en interne sur k et en externe sur p, on a

$$S_n = \sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n} 2^k = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=p}^{n} 2^k.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $q = 2 \neq 1$. On a donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=1}^{n} 2^p \frac{2^{n-p+1}-1}{2-1} \\ &= \sum_{p=1}^{n} \left(2^{n+1} - 2^p\right) \\ &= n2^{n+1} - 2\frac{2^n-1}{2-1} \\ &= n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 \\ &= (n-1)\,2^{n+1} + 2. \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient une fois encore,

$$\boxed{S_n = (n-1)\,2^{n+1} + 2.}$$

(c) On procède comme dans la question précédente, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant p<k\leqslant n} \binom{n}{p} 2^k &= \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{k=p+1}^{n} \binom{n}{p} 2^k \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} \sum_{k=p+1}^{n} 2^k \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} 2^{p+1}\frac{2^{n-p-1+1}-1}{2-1} \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} \left(2^{n+1} - 2^{p+1}\right) \\ &= 2^{n+1}\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} - \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} 2^{p+1} \\ &= 2^{n+1}\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} - 2^{n+1} - 2^{n+1} - \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{p+1} + 2 + 2^{n+1}. \end{aligned}$$

On reconnaît alors deux binômes de Newton :

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant p<k\leqslant n} \binom{n}{p} 2^k &= 2^{n+1}\,(1+1)^n - 2^{n+1} - 2\,(2+1)^n + 2 \\ &= 2^{2n+1} - 2^{n+1} - 2\times 3^n + 2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{1\leqslant p<k\leqslant n} \binom{n}{p} 2^k = 2^{n+1}\,(2^n - 1) - 2\times 3^n + 2.}$$

8. *(Une conséquence)* Par l'inversion d'indice $\tilde{k} = n - k$, on obtient que

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} \\
&= \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \frac{n-k}{2^{n-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{2^{n-k}} - \frac{k}{2^{n-k}} && \text{car l'indice est muet} \\
&= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k - \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} k 2^k \\
&= \frac{n}{2^n} \frac{2^{n+1}-1}{2-1} - \frac{1}{2^n} S_n && \text{car on reconnaît une somme géométrique} \\
&= n\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n}\left((n-1)\,2^{n+1} + 2\right) && \text{par ce qui précède} \\
&= 2n - \frac{n}{2^n} - 2\,(n-1) - \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.}$$

Problème II - Fonctions usuelles

Partie 1 : Simplification par la dérivée

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad \varphi : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}.$$

1. Les fonctions sh et ch sont définies sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1+\operatorname{ch}(x) \geqslant 1+1 > 0.$$

Donc $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas :

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}.}$$

2. On note que $\mathcal{D}$ est centré en 0. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(-x) &= \frac{\operatorname{sh}(-x)}{1+\operatorname{ch}(-x)} \\ &= \frac{-\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)} && \text{car sh est impaire et ch est paire} \\ &= -\varphi(x).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est impaire.}}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)} = \frac{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}{1+\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

En factorisant par le terme prépondérant qui est e^x, on obtient

$$\varphi(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+2\,\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Puisque $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mathrm{e}^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on conclut que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1.}$$

4. La fonction φ est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) &= \frac{\operatorname{sh}'(x)\,(1+\operatorname{ch}(x)) - \operatorname{sh}(x)\,(1+\operatorname{ch}(x))'}{(1+\operatorname{ch}(x))^2} \\ &= \frac{\operatorname{ch}(x)\,(1+\operatorname{ch}(x)) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(x)}{(1+\operatorname{ch}(x))^2} \\ &= \frac{\operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)}{(1+\operatorname{ch}(x))^2}.\end{aligned}$$

Or on a $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$. D'où,

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)+1}{(1+\operatorname{ch}(x))^2} = \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x)}.}$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\operatorname{ch}(x) \geqslant 2 > 0$ donc par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x)} > 0.$$

On en déduit que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$. Donc par imparité de φ, on en déduit également que $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = -1$. Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

6. On observe que $f = \arctan \circ \varphi$. Or les fonctions φ et arctan sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \varphi'(x) \arctan'(\varphi(x)) \\
&= \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x)} \frac{1}{1+\varphi^2(x)} && \text{par la question 4.} \\
&= \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x)} \frac{1}{1+\frac{\operatorname{sh}^2(x)}{(1+\operatorname{ch}(x))^2}} \\
&= \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x)} \frac{(1+\operatorname{ch}(x))^2}{(1+\operatorname{ch}(x))^2+\operatorname{sh}^2(x)} \\
&= \frac{1+\operatorname{ch}(x)}{1+2\operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}^2(x)+\operatorname{sh}^2(x)} \\
&= \frac{1+\operatorname{ch}(x)}{1+2\operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}^2(x)+\operatorname{ch}^2(x)-1} \\
&= \frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2\operatorname{ch}(x)+2\operatorname{ch}^2(x)} \\
&= \frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2\operatorname{ch}(x)(1+\operatorname{ch}(x))} \\
&= \frac{1}{2\operatorname{ch}(x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2\operatorname{ch}(x)}.}$$

7. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(x))$. La fonction h est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui le sont. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}'(x)\arctan'(\operatorname{sh}(x)) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{2}\frac{1}{1+\operatorname{sh}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}(x)}{2}\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{2\operatorname{ch}(x)}.$$

Ainsi, on observe que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = h'(x).$$

Par suite,
$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = h(x) + C.$$
En particulier pour $x = 0$,
$$\begin{aligned} f(0) = h(0) + C \qquad &\Leftrightarrow \qquad \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(0)}{1+\mathrm{ch}(0)}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\mathrm{sh}(0)\right) + C \\ &\Leftrightarrow \qquad 0 = 0 + C \\ &\Leftrightarrow \qquad C = 0. \end{aligned}$$
Conclusion, on obtient bien que
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = h(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\mathrm{sh}(x)\right).}$$

Partie 2 : Simplification par la trigonométrie

On considère la fonction
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right). \end{array}$$

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ et $1 + \sqrt{1+x^2} \geqslant 1 > 0$. De plus la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Donc par composition et quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas, g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   - L'ensemble $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par imparité de la fonction arctan on a
   $$\begin{aligned} g(-x) &= \arctan\left(\frac{-x}{1+\sqrt{1+(-x)^2}}\right) \\ &= \arctan\left(-\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= -\arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

   Conclusion,
   $$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est impaire.}}$$
9. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $1 + x^2 > x^2$. Donc par la stricte croissance de la fonction racine carrée,
   $$\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = x \qquad \text{car } x \geqslant 0.$$
   D'autre part, on a directement $\sqrt{1+x^2} < 1 + \sqrt{1+x^2}$. Conclusion,
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x < \sqrt{1+x^2} < 1 + \sqrt{1+x^2}.}$$
10. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque $0 \leqslant x < 1 + \sqrt{1+x^2}$ et que $1 + \sqrt{1+x^2} > 0$, on en déduit que
   $$0 \leqslant \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} < 1.$$
   Par la stricte croissance de la fonction arctan sur $\mathbb{R}$, on en déduit que
   $$0 = \arctan(0) \leqslant \arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leqslant g(x) < \frac{\pi}{4}.}$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par la question précédente, $g(x) \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[\subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Donc $\tan(g(x))$ existe. De même,
$$2g(x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ \tan(g(x)) \text{ et } \tan(2g(x)) \text{ existent.}}$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque $\tan(g(x))$ et $\tan(2g(x))$ existent, on a
$$\tan(2g(x)) = \frac{2\tan(g(x))}{1 - \tan^2(g(x))}.$$
Or, $g(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)$ donc $\tan(g(x)) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$ (c'est la composée inverse qui pose problème). D'où
$$\begin{aligned}
\tan(2g(x)) &= \frac{2\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}}{1 - \left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)^2} \\
&= \frac{2x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^2 - x^2} \\
&= \frac{2x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+2\sqrt{1+x^2}+1+x^2-x^2} \\
&= \frac{2x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{2+2\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+\sqrt{1+x^2}} \\
&= x.
\end{aligned}$$
Conclusion, on obtient bien
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \tan(2g(x)) = x.}$$

13. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par la question précédente, $\tan(2g(x)) = x$. Donc en composant par la fonction arctan, on a
$$\arctan(\tan(2g(x))) = \arctan(x).$$
Or $2g(x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\subseteq \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent,
$$\arctan(\tan(2g(x))) = 2g(x).$$
Ainsi,
$$2g(x) = \arctan(x) \qquad \Rightarrow \qquad g(x) = \frac{1}{2}\arctan(x).$$
De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a $-x \in \mathbb{R}_+$ et donc par ce que l'on vient de démontrer
$$g(-x) = \frac{1}{2}\arctan(-x).$$
Or les fonctions g et arctan sont impaires. Donc
$$-g(x) = -\frac{1}{2}\arctan(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x) = \frac{1}{2}\arctan(x).$$
La relation reste donc vraie sur $\mathbb{R}_-$. Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\arctan(x).}$$

14. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u = \text{sh}(x)$. Par la question précédente, on a

$$g(u) = \frac{1}{2}\arctan(u)$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
& & g(\text{sh}(x)) &= \frac{1}{2}\arctan(\text{sh}(x)) & \\
&\Leftrightarrow & \arctan\left(\frac{\text{sh}(x)}{1+\sqrt{1+\text{sh}(x)^2}}\right) &= \frac{1}{2}\arctan(\text{sh}(x)) & \\
&\Leftrightarrow & \arctan\left(\frac{\text{sh}(x)}{1+\sqrt{\text{ch}^2(x)}}\right) &= \frac{1}{2}\arctan(\text{sh}(x)) & \text{car } \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow & \arctan\left(\frac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)}\right) &= \frac{1}{2}\arctan(\text{sh}(x)) & \text{car } \text{ch}(x) > 0 \\
&\Leftrightarrow & f(x) &= \frac{1}{2}\arctan(\text{sh}(x)) \qquad \textit{incroyable !} &
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 7. :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \arctan\left(\frac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)}\right) = \frac{1}{2}\arctan(\text{sh}(x)).}$$

Partie 3 : Pour occuper les plus rapides

On considère l'équation

$$(E) \ : \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

15. On sait que g est définie sur $\mathbb{R}$. Donc pour $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{D}_E &\Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \text{ existe} \\
&\Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1 \\
&\Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}_E = [-2; 2].}$$

16. Soit $x \in \mathcal{D}_E$. On sait que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$. Donc

$$\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2 \times \frac{x}{2}\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Or pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)$. De plus, pour $u = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$, on a $u \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\cos(u) \geqslant 0$. Dans ce cas,

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \cos(u) = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_E, \qquad \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.}$$

17. Soit $x \in \mathcal{D}_E$. Posons $u = \arctan(x)$. On a $u \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On a

$$\sin^2(u) = 1 - \cos^2(u).$$

Or puisque $u \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(u) \neq 0$ et on a $\frac{1}{\cos^2(u)} = \tan'(u) = 1 + \tan^2(u)$. Donc

$$\sin^2(u) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(u)} = \frac{\tan^2(u)}{1+\tan^2(u)}.$$

Si $x \geqslant 0$, alors $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\sin(u) \geqslant 0$ et $\tan(u) \geqslant 0$. Dans ce cas,

$$\sin(u) = \sqrt{\frac{\tan^2(u)}{1+\tan^2(u)}} = \frac{\tan(u)}{\sqrt{1+\tan^2(u)}}.$$

Au contraire si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Alors, $\sin(u) \leqslant 0$ et $\tan(u) \leqslant 0$. Dans ce cas,

$$\sin(u) = -\sqrt{\frac{\tan^2(u)}{1+\tan^2(u)}} = -\frac{-\tan(u)}{\sqrt{1+\tan^2(u)}} = \frac{\tan(u)}{\sqrt{1+\tan^2(u)}}.$$

Donc dans tous les cas,

$$\sin\left(\arctan(x)\right) = \frac{\tan\left(\arctan(x)\right)}{\sqrt{1+\tan^2\left(\arctan(x)\right)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in D_E, \qquad \sin\left(\arctan(x)\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

18. *Analyse.* Soit $x \in \mathcal{D}_E$. Par la question 13. on a $g(x) = \frac{1}{2}\arctan(x)$. Donc

$$(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

On obtient donc les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
(E) \qquad &\Rightarrow \qquad \arctan(x) = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \\
&\Rightarrow \qquad \sin\left(\arctan(x)\right) = \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
&\Rightarrow \qquad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \qquad \text{par les deux questions précédentes} \\
&\Rightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \\
&\Rightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ \frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{x^2}{4} \\
&\Rightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ 1 = \left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1+x^2\right) \\
&\Rightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ 1 = 1 + x^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} \\
&\Rightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ 0 = \frac{3x^2}{4} - \frac{x^4}{4} \\
&\Rightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ x = 0 \ \text{ OU } \ 0 = 3 - x^2 \\
&\Rightarrow \qquad x = 0 \ \text{ OU } \ x = \sqrt{3} \ \text{ OU } \ x = -\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc trois candidats potentiellement solutions.

Synthèse. Si $x = 0$, alors

$$(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\arctan(0) = \arcsin\left(\frac{0}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \arcsin(0) \text{ OK.}$$

Si $x = \sqrt{3}$, on a

$$(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ impossible.}$$

De même si $x = -\sqrt{3}$, on a

$$(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \text{ impossible.}$$

Conclusion, l'unique solution de (E) est donnée par

$$\boxed{x = 0.}$$