Correction de l'interrogation 0
Révisions de calculs

1. Simplifier $A = \dfrac{\frac{\frac{13}{5} - \frac{2}{13}}{\frac{4}{7} + \frac{5}{3} + \frac{59}{21}}}{1 - \frac{7}{9}}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$A = \frac{\frac{\frac{13}{5} - \frac{2}{13}}{\frac{4}{7} + \frac{5}{3} + \frac{59}{21}}}{1 - \frac{7}{9}} = \frac{\frac{\frac{169-10}{5\times 13}}{\frac{12+35+59}{21}}}{\frac{2}{9}} = \frac{\frac{159}{5\times 13}}{\frac{106}{21} \times \frac{9}{2}} = \frac{\frac{159}{5\times 13}}{\frac{53}{7} \times 3} = \frac{3 \times 53 \times 7}{53 \times 3 \times 5 \times 13} = \frac{7}{5 \times 13}$$

Conclusion,

$$\boxed{A = \frac{7}{65}.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1; 4\}$. Simplifier $B = \dfrac{1 + \frac{9}{4(x-1)} - \frac{49}{4(x+3)}}{1 - \frac{7}{x+3}}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$B = \frac{\frac{4x^2+8x-12+9x+27-49x+49}{4(x-1)(x+3)}}{\frac{x-4}{x+3}} = \frac{4x^2 - 32x + 64}{4(x-1)(x+3)} \times \frac{x+3}{x-4} = \frac{x^2 - 8x + 16}{(x-1)(x-4)} = \frac{(x-4)^2}{(x-1)(x-4)}$$

Conclusion,

$$\boxed{B = \frac{x-4}{x-1}.}$$

3. Simplifier $C = \dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{80}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

Solution. En multipliant par « la quantité conjuguée », on a les égalités entre réels suivantes :

$$C = \frac{\left(2\sqrt{3} + 2\sqrt{20}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)}{3-5} = -\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right) = -\left(3 - \sqrt{15} + 2\sqrt{15} - 10\right) = 7 - \sqrt{15}.$$

Conclusion,

$$\boxed{C = 7 - \sqrt{15}.}$$

4. Simplifier $D = \frac{1}{7}\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{45}^{\sqrt{3}}\sqrt{245}^{\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{3}}}{15^4}}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$D = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{\left(\sqrt{9 \times 5 \times 5 \times 49}\right)^6}{15^4}} = \frac{1}{7}\frac{(3 \times 5 \times 7)^3}{15^2} = 3 \times 5 \times 7^2 = 3 \times 5 \times 49 = 3 \times 245 = 735.$$

Conclusion,

$$\boxed{D = 735.}$$

5. Soit $x \in]2; +\infty[$. Simplifier $E = \ln\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}\right) + \ln\left(\frac{x^2-4x+4}{2x+1}\right)$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$E = \ln\left(\frac{2x+1}{(x-2)(x+3)}\right) + \ln\left(\frac{(x-2)^2}{2x+1}\right) = \ln\left(\frac{2x+1}{(x-2)(x+3)} \times \frac{(x-2)^2}{2x+1}\right) = \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{E = \ln(x-2) - \ln(x+3).}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $F = \dfrac{\left(\frac{\mathrm{e}^{3x^2}}{\mathrm{e}^{6x}\,\mathrm{e}^{-3}}\right)^{1/6}}{\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :
$$F = \left(\mathrm{e}^{3x^2-6x+3}\right)^{1/6} \mathrm{e}^{\frac{(x-1)^2}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{x^2-2x+1}{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{(x-1)^2}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{(x-1)^2}{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{(x-1)^2}{2}} = \mathrm{e}^{(x-1)^2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{F = \mathrm{e}^{(x-1)^2}.}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $G = \left((x-1)^2+2\right)^2$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :
$$G = \left(x^2-2x+1+2\right)^2 = \left(x^2-2x+3\right)^2 = x^4+4x^2+9-4x^3+6x^2-12x = x^4-4x^3+10x^2-12x+9.$$
Conclusion,
$$\boxed{G = x^4-4x^3+10x^2-12x+9.}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser au maximum $H = \mathrm{e}^{4x} - 18\,\mathrm{e}^{2x} + 81$.
Solution. Posons $X = \mathrm{e}^x$. On a les égalités entre réels suivantes :
$$H = X^4 - 18X^2 + 81 = \left(X^2-9\right)^2 = (X-3)^2(X+3)^2.$$
Conclusion,
$$\boxed{H = (\mathrm{e}^x-3)^2(\mathrm{e}^x+3)^2.}$$

9. Déterminer le domaine de dérivabilité puis dériver $f : x \mapsto \sin\left(\ln\left(x^3+1\right)\right)$.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :
$$f \text{ est dérivable en } x \quad\Leftrightarrow\quad x^3+1>0 \quad\Leftrightarrow\quad x^3>-1 \quad\Leftrightarrow\quad x>-1.$$
Donc f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et
$$\forall x \in\,]-1;+\infty[, \qquad \begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left(x^3+1\right)\right)'\cos\left(\ln\left(x^3+1\right)\right) \\ &= \frac{\left(x^3+1\right)'}{x^3+1}\cos\left(\ln\left(x^3+1\right)\right) \\ &= \frac{3x^2}{x^3+1}\cos\left(\ln\left(x^3+1\right)\right). \end{aligned}$$
Conclusion, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-1;+\infty[}$ et
$$\boxed{\forall x \in\,]-1;+\infty[, \qquad f'(x) = \frac{3x^2}{x^3+1}\cos\left(\ln\left(x^3+1\right)\right).}$$

10. Déterminer le domaine de dérivabilité puis dériver $g : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1+x\ln(x)}{x^2-1}}$.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :
$$g \text{ est dérivable en } x \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0 \\ x^2-1\neq 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x\neq -1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x \in\,]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[.$$

Donc la fonction g est dérivable sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\frac{1+x\ln(x)}{x^2-1}\right)' \mathrm{e}^{\frac{1+x\ln(x)}{x^2-1}}\\
&= \frac{(1+x\ln(x))'\left(x^2-1\right)-(1+x\ln(x))\,2x}{\left(x^2-1\right)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1+x\ln(x)}{x^2-1}}\\
&= \frac{(\ln(x)+1)\left(x^2-1\right)-2x-2x^2\ln(x)}{\left(x^2-1\right)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1+x\ln(x)}{x^2-1}}\\
&= \frac{x^2\ln(x)-\ln(x)+x^2-1-2x-2x^2\ln(x)}{\left(x^2-1\right)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1+x\ln(x)}{x^2-1}}\\
&= \frac{-x^2\ln(x)-\ln(x)+x^2-2x-1}{\left(x^2-1\right)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1+x\ln(x)}{x^2-1}}\,.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0;1[\cup]1;+\infty[}$ et

$$\boxed{\forall x\in]0;1[\cup]1;+\infty[\,,\qquad g'(x)=-\frac{x^2\ln(x)+\ln(x)-x^2+2x+1}{\left(x^2-1\right)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1+x\ln(x)}{x^2-1}}\,.}$$